Elementary Treatise

ON

MECHANICS

VOL. I. *STATICS.*

यंत्रशास्त्र

पूर्वार्ध.

यंत्रस्थितिशास्त्र

हा ग्रंथ

बाळाजी प्रभाकर मोडक
कोल्हापूर येथील राजाराम कॉलेजांतील
पदार्थविज्ञानशास्त्राचे गुरु
आणि
राजकुमारांचे सुपरिंटेंडंट

यांनीं

अनेक इंग्रजी ग्रंथांच्या आधारें

ट्रेनिंगकालेजांत व दुसऱ्या मोठ्या विद्यालयांत
मराठीभाषेच्या द्वारें शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यां-
च्या उपयोगाकरितां रचिला.

जून सन १८८७ इसवी.

किंमत २ रुपये.

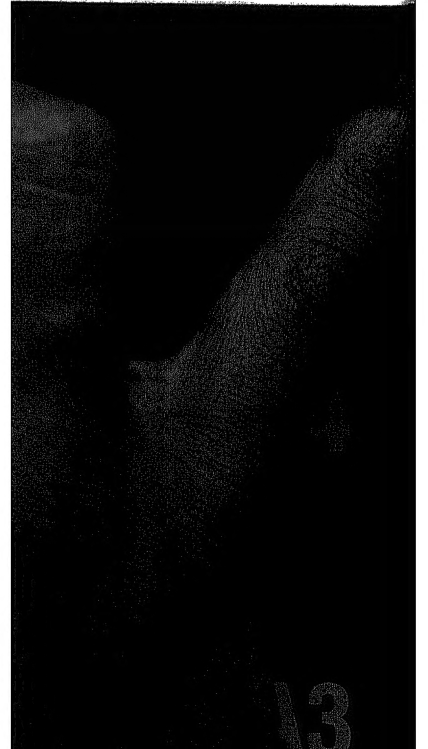
कोल्हापूर येथें
विद्याविलास छापखान्यांत छापिला.

प्रस्तावना.

सृष्टिशास्त्र व रसायनशास्त्र यांतील यंत्रांचें वर्णन करितांना यंत्रशास्त्रांतील माहितीच्या शब्दांचा व सिद्ध झालेल्या गोष्टींचा वारंवार उपयोग करावा लागूं लागला व याविषयीं हवाला देण्यास यंत्रशास्त्रांतील सर्व सिद्धांत यथाशास्त्र दिलेलें पुस्तक नसल्यामुळें अडचण पडूं लागली, तेव्हां यंत्रशास्त्रावर एक पुस्तक लिहावें असें मनांत आलें, व त्यांत यंत्रशास्त्राचे मूळभूत सिद्धांत लिहिण्याचा विचार प्रथम केला व तोच कित्येक मित्रांनीं पसंत केला. परंतु असें केल्यानें मराठी भाषेंत जी खरी उणीव ती पुरी होणार नाहीं असें मला वाटलें. कारण यंत्रशास्त्राविषयीं साधारण माहिती हरी केशवजीच्या पदार्थविज्ञानांत, केरोपंती पदार्थविज्ञानांत आणि फडकेकृत यंत्रशास्त्राचीं सूत्रें यांत दिलेली आहे; परंतु त्यांतील माहिती केवळ तांत्रिक असून यंत्रशास्त्रांतील भ्रामकत्व, प्रेरणायुग्म, घर्षण, प्रेरणासमांतरभुज-चौकोन, समांतर प्रेरणांचीं कार्यें, समांतर प्रेरणांचा मध्य, गुरुत्वमध्य इत्यादि अनेक महत्वाच्या उपयुक्त विषयांचें विशेष विवेचन नसून केवळ दिग्दर्शन केलें आहे. इतकें नव्हे तर कोणत्याच विषयाचें यथाशास्त्र गणितरीत्या विवेचन केलेलें नाहीं. या करितां सदर प्रमाणें पुस्तक लिहिल्यानें, मराठी भाषेंतील शास्त्रीय विषयांवरील ग्रंथांत मोठीशी भर पडणार नाहीं असें निश्चिंतपणें वाटून जर यंत्रशास्त्रावर ग्रंथ लिहिणें तर निदान युनिव्हर्सिटींतील बी. ए. च्या परीक्षेच्या उमेदवारांस जितकें ज्ञान असावें लागतें, तितक्या माहितीचा समावेश होण्याजोगें तरीं असलेलें पुस्तक असावें असें वाटलें. राजाराम कालेजांत फर्स्ट बि. ए. क्लास सन १८८३ सालीं सुरू झाल्यापासून त्या क्लासास यंत्रस्थितिशास्त्र शिकविण्याचें काम मजकडेच असल्यानें स्वाभाविकच या विषयावरील अनेक

न्त्रशास्त्रावर संपूर्ण ग्रंथ लिहिण्याचें योजिलें आहे. याचे एकंदर तीन भाग होतील. (१) स्थितिशास्त्र, (२) गतिशास्त्र आणि (३) विणण्याची, छापण्याची, तसे मारण्याची, दळण्याची, कापण्याची, भोंकें पाडण्याची रंधण्याची वगैरे हातानें व वाफेनें चालणारीं यंत्रें व तसेंच लहान थोर घड्याळें यांविषयीं वर्णन. यांपैकीं पहिला भाग स्थितिशास्त्र हल्लीं प्रसिद्ध केला आहे.

यंत्रस्थितिशास्त्राचें यथाशास्त्र गणितरीत्या विवेचन करण्यास त्रिकोणमितीचा आधार लागतो. वर्गसमीकरणें, गणितश्रेढी, भूमितिश्रेढी, कुट्टक इत्यादि बीजगणितांतील विषयसुद्धां आतां कोठें शिकवीत नाहींत. मरींव भूमिति, शंकुछिन्न, आणि त्रिकोणमिति यांचा वासस्द्धां शेंकडा एका मास्तरास नसतो. मराठी शाळांत अंकगणितापर्यंत कायतें गणित शिकवितात. मराठी भाषेच्या द्वारें गहन विषय शिकविण्याचीं जीं विद्यालयें ट्रेनिंगकालेजें त्यांमध्येंसुद्धां वर्गसमीकरणाच्या पलीकडे शिकवीत नाहींत. यंत्रशास्त्रांतील केवळ यांत्रिक शक्तीविषयीं थोडीशी माहिती सांगतात. यास्तव कित्येक म्हणूं लागले कीं, असल्या गहनविषयावर पुस्तक लिहिल्यास त्याकडे पाहतो कोण? असलें गहनपुस्तक वाचतो कोण, व याचा उपयोग कोण करणार? माझ्या विद्युत आणि चुंबन या विषयावरील पुस्तकावर टीका करितांना एका प्रसिद्ध मराठी वर्तमानपत्रांतही मला या-



ठी भाषेच्या द्वारें अध्ययन करण्यांत घालवितील त्यांस मोठ्या विद्यालयांत जाण्याच्या प्रवेशपरीक्षे इतका अभ्यास करण्याचा मात्र मार्ग आहे. एवढ्याच काळांत बि· ए· च्या परीक्षे इतका अभ्यास होण्यास कांहीं हरकत दिसत नाहीं. कदाचित लागलें तर एक वर्ष जास्त लागेल. गणित, इतिहास, पदार्थविज्ञान व रसायनशास्त्र, तर्कशास्त्र, नीतिशास्त्र राजनीती वगैरे गहन विषय स्वभाषेच्या द्वारें शिकण्यास अगदीं मार्ग नाहीं, उंचप्रतीचें शिक्षण कायतें इंग्रजी भाषेच्या द्वारें मिळतें. इंग्रजी भाषा शिकण्यास काळ व खर्च फार लागतो. याची अनुकूलता थोड्यांस असते. इंग्रजी भाषा शिकण्याचीं स्थळें हायस्कुलें होय. हीं विद्यालयें फक्त जिल्ह्यांच्या ठिकाणीं आहेत. यांतही हल्लीं फी इतकी वाढली आहे कीं, ती मध्यम-स्थितींतल्या लोकांस रुद्धां झेपत नाहीं· शिवाय यांत अगदीं साधारण शिक्षण मिळतें. हायस्कुलांत शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांची तरी संख्या केवढी आहे? या इलाख्यांतील सर्व हायस्कुलांत मिळून ११८७६. हून जास्त विद्यार्थी नाहींत. कोल्हापूर इलाख्याचेंच एक उदाहरण घेऊं. या इलाख्यांत ब्रिटिश इलाख्यांतील कोणत्याही जिल्ह्यापेक्षां विद्येचा प्रसार कमी झालेला नाहीं या इलाख्यांतील ८००००० प्रजेपैकीं हायस्कुलांत शिकणारी संख्या ५०० आहे. म्हणजे सरासरी १५।१६,०० संख्येस एक पडला. १५०० पैकीं आणखी निदान १००।१५० तरी हायस्कूलचें शिक्षण कमी

ती आहे. ... यंत्रशास्त्रावर संपूर्ण ग्रंथ लिहिण्याचें योजिलें आहे. याचे एकंदर तीन भाग होतील. (१) स्थितिशास्त्र, (२) गतिशास्त्र आणि (३) विणण्याचीं, छापण्याची, तसे मारण्याची, दळण्याची, कापण्याची, भोंकें पाडण्याचीं रंधण्याचीं वगैरे हातानें व वाफेनें चालणारीं यंत्रें व तसेंच लहान थोर घड्याळें यांविषयीं वर्णन. यांपैकीं पहिला भाग स्थितिशास्त्र हल्लीं प्रसिद्ध केला आहे.

यंत्रस्थितिशास्त्राचें यथाशास्त्र गणितरीत्या विवेचन करण्यास त्रिकोणमितीचा आधार लागतो. वर्गसमीकरणें, गणित श्रेढी, भूमितिश्रेढी, कुट्टक इत्यादि बीजगणितांतील विषयसुद्धां आतां कोठें शिकवीत नाहींत. शरीव भूमिति, शंकुछिन्न, आणि त्रिकोणमिति यांचा वासस्द्धां शेंकडा एका मास्तरास नसतो. मराठी शाळांत अंकगणितापर्यंत कायतें गणित शिकवितात मराठी भाषेच्या द्वारें गहन विषय शिकविण्याचीं जीं विद्यालयें ट्रेनिंगकालेजें त्यांमध्येंसुद्धां वर्गसमीकरणाच्या पलीकडे शिकवीत नाहींत. यंत्रशास्त्रांतील केवळ यांत्रिक शक्तीविषयीं थोडीशी माहिती सांगतात. यास्तव कित्येक म्हणूं लागले कीं, असल्या गहनविषयावर पुस्तक लिहिल्यास त्याकडे पाहतो कोण? असलें गहनपुस्तक वाचतो कोण, व याचा उपयोग कोण करणार? माझ्या विद्युत आणि चुंबन या विषयावरील पुस्तकावर टीका करितांना एका प्रसिद्ध मराठी वर्तमानपत्रांतही मला या-

च प्रकारें दोष देण्यांत आला. हल्लीं मराठी भाषेच्या द्वारें शिक्षण दे-ण्याची जी पद्धत आहे तिचें मान पाहतां हें खरें आहे.

मराठी शाळांत फक्त **सहा इयत्तां** पर्यंत शिकवितात. त्यांतील विषय म्हणजे साधारण इंग्रजी **चवथ्या इयत्ते**पेक्षां कमी किंवा तितके आहेत. मास्तर तयार करण्याकरितां जीं तीन **ट्रेनिंगकालेजें** आहेत त्यांतही साधारण **म्याट्रिक्युलेशन** परीक्षे इतकें शिकवितात. म्हणजे कोणी आपला सर्व अध्ययन करण्याचा काळ मराठी भाषेच्या द्वारें अध्ययन करण्यांत घालवितील त्यांस मोठ्या विद्यालयांत जाण्याच्या **प्रवेशपरीक्षे** इतका अभ्यास करण्याचा मात्र मार्ग आहे. एवढ्याच काळांत बि. ए. च्या परीक्षे इतका अभ्यास होण्यास कांहीं हरकत दिसत नाहीं. कदाचित लागलें तर एक वर्ष जास्त लागेल. गणित, इतिहास, पदार्थविज्ञान व रसायनशास्त्र, तर्कशास्त्र, नीतिशास्त्र राजनीती वगैरे गहन विषय स्वभाषेच्या द्वारें शिकण्यास अगदीं मार्ग नाहीं, उंचप्रतीचें शिक्षण कायतें इंग्रजी भाषेच्या द्वारें मिळतें. इंग्रजी भाषा शिकण्यास काळ व खर्च फार लागतो. याची अनुकूलता थोड्यांस असते. इंग्रजी भाषा शिकण्याचीं स्थळें हायस्कुलें होय. हीं विद्यालयें फक्त जिल्ह्यांच्या ठिकाणीं आहेत. यांतही हल्लीं फी इतकी वाढली आहे कीं, ती मध्यम-स्थितींतल्या लोकांस रुच्चां झेंपत नाहीं. शिवाय यांत अगदीं साधारण शिक्षण मिळतें. हायस्कुलांत शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांची तरी संख्या केवढी आहे? या इलाख्यांतील सर्व हायस्कुलांत मिळून ११८७६ हून जास्त विद्यार्थी नाहींत. कोल्हापूर इलाख्याचेंच एक उदाहरण घेऊं. या इलाख्यांत ब्रिटिश इलाख्यांतील कोणत्याही जिल्ह्यापेक्षां विद्येचा प्रसार कमी झालेला नाहीं या इलाख्यांतील ८००००० प्रजेपैकीं हायस्कुलांत शिकणारी संख्या ५०० आहे. म्हणजे सरासरी १५।१६०० संख्येस एक पडला. १५०० पैकीं आणखी निदान १००।१५० तरी हायस्कूलचें शिक्षण कमी

ठ ठिकाणीं आहेत. या सर्वांत मिळून १५०० हून जास्त विद्यार्थी शिकत असतील असें वाटत नाहीं व यांपैकीं ३००।४०० हून जास्त असामीची मजल बि. ए. पर्यंत पोंचत नसेल. या इलाख्यांतील दोन तीन कोट प्रजेपैकीं १५०० स मात्र उंच मतीचें शिक्षण मिळावें, ही गोष्ट किती शोचनीय आहे याचा विचार वाचकांनीच करावा!! अशी स्थिति असतां मार जिकडून तिकडे विद्येचा प्रसार फार झाला! फार झाला! अशी मात्र ओरड चालते. आज ह्यात असलेल्या सर्व बि. ए. ची संख्या घेतली तर लाखास १५ पडण्याची मुष्कील पडेल. ही गोष्ट खरोखर मोठी शोचनीय आहे केवळ अगदीं खालच्या मतीचें शिक्षण मिळण्याच्या मात्र सोयी झाल्या आहेत. खरी विद्या किंवा उंच मतीचें शिक्षण मिळण्याच्या सोयी मोठ्या समाजाच्या उपयोगीं पडण्याजोग्या फारच कमी आहेत, यांत संशय नाहीं.

इंग्रजी भाषेचा इतका फैलाव झाला आहे व ती भाषा शिकण्याच्या इतक्या सोयी वाढल्या आहेत, तरी मध्यमस्थितीच्या बहुतेक लोकांत व हलक्या वर्गाच्या सर्व लोकांत इंग्रजी भाषेची अद्याप व्याप्ति झाली नाहीं व पुढेंही होण्याचा संभव नाहीं. सर्व तालुक्यांच्या ठिकाणीं, व इतर मोठ्या गांवीं इंग्रजी हायस्कुलें स्थापन होण्याचा संभव नाहीं यास्तव तेथच्या लोकांस उंच मतीचें शिक्षण मिळण्याच्या सोयी त्या त्या ठिकाणींच झाल्या पाहिजेत. शास्त्रीय व

इतर गहनविषयांचें ज्ञान स्वभाषेच्या द्वारेंच झालें पाहिजे व अशाज्ञानाची जास्तव्याप्ति होण्यास तर दुसरा मार्गच नाहीं. वस्तुतः कोणतेंही शास्त्रीयज्ञान किंवा गहनविषयाचें ज्ञान कोणत्याही देशांत किंवा लोकांत स्वभाषेच्या द्वारें दिलें नाहीं तर तें तेथें विस्तार पावत नाहीं, लोकमान्य होत नाहीं आणि त्यावर विचार करणारे व ग्रंथ लिहिणारे अनेक लोक निपजत नाहींत असें सर्व मान्य लोकांचें मत आहे. परभाषेच्या द्वारें कार्यभाग होण्यास जर १०० वर्षें लागतील, तर तोच कार्यभाग स्वभाषेच्या द्वारें २०।२५ वर्षांतच होईल.

अलीकडे स्वभाषा युनिव्हर्सिटीच्या परीक्षांत ठेवण्याविषयीं थोडीशी चळवळ चालली आहे. परंतु येणेंकरून मुख्य कार्यभाग साध्य होणार नाहीं. व विद्याखात्याचा आणि युनिव्हर्सिटीचा सर्व लोकांत विद्येचा प्रसार व्हावा हाजो मुख्य उद्देश तो कधींही अशानें तडीस जाणार नाहीं. हायस्कूलच्या इतकें स्वभाषेच्या द्वारें शिक्षण देण्याजोग्या शाळा तालुक्याच्या ठिकाणीं व मोठमोठ्या शहरच्या व गांवच्या ठिकाणीं असल्या पाहिजेत. आणि बऱ्याच जिल्ह्यांच्या ठिकाणीं बी. ए. इतकें शिक्षण देणारीं कालेजें असलीं पाहिजेत. असें केल्यानें इंग्रजी शिकल्याशिवाय उंचप्रतीचें शिक्षण मिळतच नाहीं; ही अडचण दूर होईल. परंतु असें होण्यास बरीच अवधि लागेल. यास्तव आरंभीं युनिव्हर्सिटीनें हल्लीं **पुणें, अमदाबाद, धारवाड** आणि **कराची** येथील चार ट्रेनिंगकालेजांस बी. ए. पर्यंत सर्व स्वभाषेच्या द्वारें शिकविण्याचा अधिकार देऊन त्या कालेजांतील विद्यार्थ्यांस युनिव्हर्सिटीच्या सर्व परीक्षांस द्यावें आणि स्वभाषेंत जे परीक्षा पास होतील त्यांस पदव्या द्याव्या. मराठी सहाव्या इयत्तेचे अभ्यास म्याट्रिक्युलेशन परीक्षे इतके ठेवून या परीक्षेंत जे पास होतील त्यांस ट्रेनिंगकालेजांत हल्लीं प्रमाणें घ्यावें. पी. इ., पहिली बी. ए. व दुसरी बी. ए. या परीक्षांचे सर्व अभ्यास हल्लीं इंग्रजींत आहेत तेच ठेवावे. ज्यांस इं

यांमध्यें हल्लीं जें जमीन अस्मानचें अंतर असतें तें रहाणार नाहीं. ट्रेनिंग कालेजांत हल्लीं फक्त मास्तर तयार करितात. तसा उद्देश न ठेवितां मास्तर होण्याकरितांच जे येतील त्यांस मात्र शिक्षणपद्धति शिकविण्याची तेवढी वेगळी सोय असली म्हणजे बस्स होईल. किंवा हल्लीं इंग्रजी मास्तरांकरितां परीक्षा घेतात तशी घेतली तरी चालेल. हल्लीं या ट्रेनिंगकालेजांत असलेले शिक्षक स्वभाषेच्या द्वारें बी. ए.च्या परीक्षेचे गहनविषय शिकविण्याजोगे आहेत व जेथें नसतील तेथें नवीन नेमण्यास हवे तितके इंग्रजी शिकून तयार झालेले मिळतील. सन १८५९ सालीं युनिव्हर्सिटी स्थापन झाली त्यावेळीं अशी स्थिति नव्हती. यास्तव या गोष्टीचा युनिव्हर्सिटीनें अवश्य विचार करावा; आणि हिंदुस्थानांतील युनिव्हर्सिटी हिंदुस्थानच्या भाषांच्या द्वारें शिक्षणास मुळींच उत्तेजन देत नाहीं हा जो आरोप आहे. तो दूर करावा. अशी माझी सूचना आहे. स्वभाषेंत सर्व विषयांवर पुस्तकें कोठें आहेत अशी मोठी शंका निघेल या करितां तिचेंही निरसन केलें पाहिजे.

प्रवेशपरीक्षेस लागणाऱ्या विषयांवर मराठींत पुस्तकें आहेत हें सर्व कबूल करितील. आतां फक्त इंग्लंडच्या इतिहासावर चांगलीं पुस्तकें नाहींत. परंतु हा विषय मराठी म्याट्रिक्युलेशन परीक्षेंत म्हणजे हल्लींच्या मुलकी परीक्षेंत घातल्याबरोबर अनेक पुस्तकें छापून म-

सिद्ध होतील. वरील तिन्ही परीक्षांस संस्कृत भाषा इंग्रजी परीक्षां प्रमाणेंच ठेवावी. पी· इ· आणि पहिली बी· ए· या परीक्षांस लागणारे मुख्य विषय बीजगणित, सिद्धांत, त्रिकोणमिति, यंत्रस्थितिशास्त्र, पदार्थविज्ञानशास्त्र, प्राचीन इतिहास आणि तर्कशास्त्र हे होत. यांपैकीं पहिल्या पांच विषयांवर निदान मराठी भाषेंत पुस्तकें आहेत बाकी दोन विषयांवर असावीं तशीं पुस्तकें नाहींत परंतु हे छोटे विषय असून मराठींतून हे विषय शिकविणार हें प्रसिद्ध होतांच यावर पुस्तकें छापून प्रसिद्ध होतील. हल्लीं अशा पुस्तकांस मुळींच गिऱ्हाईक नाहीं म्हणून असलीं पुस्तकें लिहिण्याचा कोणी उद्योग करीत नाहीं. बी· ए· च्या दुसऱ्या परीक्षेस भाषांशिवाय इतिहास, अर्थशास्त्र, तर्कशास्त्र, नीतीशास्त्र, गणितशास्त्र आणि सृष्टिशास्त्र हे चार विषय आहेत. यांपैकीं शेवटच्या दोहोंवर बरींच पुस्तकें आहेत. व होत आहेत. पहिल्या दोहोंवर स्वभाषेच्या द्वारें हे विषय शिकविणार हें प्रसिद्ध होतांच पुस्तकें निघतील.

असो; या रीतीनें मात्र मोठमोठ्या गहन व पोक्त विषयांवर स्वभाषांत ग्रंथ होतील, स्वभाषेंत शिक्षण देणारे शिक्षक चांगले तयार होतील. खरी विद्या किंवा उंच प्रतीचें शिक्षण संपादन करून घेण्यास अधिक सोपें होऊन अनेक ठिकाणीं तें क्रमाक्रमानें मिळूं लागेल. केवळ स्वभाषा जाणणारांस कित्येक उपयुक्त विषयांचा गंधही नसतो. ती स्थिति रहाणार नाहीं. जे इंग्रजी शिकले नाहींत, ते अगदीं तुच्छवत असें समजले जाणार नाहीं; स्वभाषेची प्रौढी वाढेल, वर्तमानपत्रें चालविणारे चांगले निपजतील. मोठमोठ्या विषयांवर विचार करणारांची संख्या वाढेल. इत्यादि असंख्य फायदे होतील.

या स्थळीं हे विचार देण्यांत माझे दोन उद्देश आहेत. एक तर हा कीं या विषयाकडे लोकांचीं मनें लागून विद्वान् लोकांनीं या विषयाचा विचार करावा. वर्तमानपत्रांत याची चर्चा व्हावी, आणि सुनि-

विण्याची वेळ लवकरच येईल व आलीच पाहिजे. त्यावेळी निदान सृष्टिशास्त्र, रसायनशास्त्र आणि यंत्रशास्त्र या विषयांवरील पुस्तकांची उणीव वाटूं नये. या बुद्धीनें ही अल्पसेवा स्वभाषेची करीत आहें ती लोकांस मान्य होऊन हें पुस्तक लोकाश्रयास पात्र होईल अशी आशा आहे.

यांत जरीं यंत्रस्थितिशास्त्राचें विवेचन बरेंच पूर्णपणें गणितरीत्या करणेंचा यत्न केला आहे; तरी ज्यांस केवळ या शास्त्रांतील मूलभूत सिद्धांतांचें आणि साध्या यंत्रांचें किंवा यांत्रिकशक्तींचें ज्ञान करून घेणें आहे त्यांसही हें पुस्तक उपयोगी पडावें असा हेतु सर्व प्रकरणें लिहितांना ठेविलेला आहे. बहुतेक सिद्धता, उपपत्ति आणि सारण्या त्रिकोणमितीशिवाय सांगवतील तितक्या सांगून शिवाय त्रिकोणमितीच्या आधारें सांगितल्या आहेत. तशींच उदाहरणेंही देतांना त्रिकोणमितीशिवाय सुटणारीं व त्रिकोणमितीनें सुटणारीं अशीं दिलीं आहेत. गणितरीत्या विवेचन केलेला असा या विषयावरील हा पहिलाच ग्रंथ असल्यामुळें शब्द योजनेंत, पारिभाषिक शब्दांत, अक्षर योजनेंत वगैरे रहावी तशी सर्वत्र एक पद्धति राहिली नसेल; तथापि तसें करण्यास होईल तितका यत्न केला आहे. कित्येक विषयांचें पूर्ण विवेचन प्रथमतःच यास्थळीं केलें असल्यानें कांहीं अगदीं नवे असे पारिभाषिक शब्द योजिले आहेत. जसें, भ्रामकत्व, जुळें अथवा युग्म, घर्षणगुणक, प्रेरणासंच-

ल्य इत्यादि. असले शब्द कोणत्या इंग्रजी शब्दांस योजिले आहेत, हें एकदम समजावें व त्यांत सुधारणा करण्यास एकदम सुचविता यावें, याकरितां बहुतेक पारिभाषिक शब्दांचा शेवटीं कोश दिला आहे. सिक्के छापानें छापून आकृति शेवटीं देण्यापेक्षां, आकृति जेथच्या तेथें देतां येण्याकरितां सुंदर शिळाछापानें पुस्तक छापिलें आहे व अनुक्रमणिका कलमवार दिली आहे. अशुद्धें न रहावीं या करितां जरी बराच यत्न केला, तरी बरींच अशुद्धें राहिलीं व शुद्धिपत्र बरेंच मोठें झालें आहे. अशा मोठ्या व गहन विषयावरील विवेचनांत दोष राहण्याचा संभव आहे. यास्तव जे दोष कोणाच्या नजरेस येतील, ते त्यांनीं मला कळविण्याची मेहेरबानी करावी; अशी माझी त्यांस प्रार्थना आहे. म्हणजे दुसऱ्या आवृत्तींत ते दोष दुरुस्त करीन. आतां प्रस्तावना बरीच लांब झाली, याबद्दल वाचकांची माफी मागून आणि यास उदार आश्रय मिळून यंत्रशास्त्राचे राहिलेले दोन भाग प्रसिद्ध करण्यास उत्तेजन मिळावें, याबद्दल जगन्नियंत्याची प्रार्थना करून पुरें करितों.

राजाराम कालेज यंत्रशाळा. }
कोल्हापूर ता॰ २१ जून १८८७ }

बा॰ प्र॰ मोडक.

4

A3

अनुक्रमणिका.

यंत्रशास्त्र.

पूर्वार्ध

यंत्रस्थितिशास्त्र.

प्रकरण १

उपोद्घात.

प्रकरण ४
समांतर प्रेरणा.

प्रकरण ५
भ्रामकत्व.

प्रकरण ७

गुरुत्वमध्य.

प्रकरण ८
साधीं यंत्रें किंवा यांत्रिकशक्ति.

प्रकरण ९
चाक व कणा.
(अक्षचक्र.)

प्रकरण १०
कप्पी.

प्रकरण ११

उतरण आणि पाचर.

प्रकरण १२
मळसूत्र.

कलम.	विषय.	पृष्ठ.

प्रकरण १३
घर्षण.

यंत्रस्थितिशास्त्र शिकण्यास व शिकविण्यास लागणाऱ्या यंत्राची यादि.

	पौंड	शि.	पे.
फळ्यावर यंत्रें टांगण्याची फळी	०	५	०
तीन पारडीं	०	२	०
१६ वजनांचा गंज जस्ती $\frac{1}{16}$ पौंडापासून	०	७	६

	पौं.	शि.	पे.
यंत्रें अडकविण्याचे आंकडे वगैरे१२	०	१	०
दोरीचें गुंडें एक	०	१	०
३ फूट लांबीचा एक उच्चालक	०	४	०
चार साध्या कप्प्या	०	६	०
तीन स्वांचाच्या कप्प्यांचा जोड	०	७	०
व्हाइटच्या कप्प्यांचा जोड	०	८	०
४फूट उंचीची कप्प्या टांगण्याची चौकट	०	७	६
उतरण- तिजवरील गाडा व कप्पी	०	९	०
पाचर वचिरलेला तुकडा	०	४	०
चाक व कणा साधा	०	२	०
संयुक्त चाक व कणा मळसूत्र,टांगण्याच्या बैठकीस्कद्धां }	०	१८	०
	४	१	०

यांत्रिकशक्तीचा संच— यांत तीन प्रकारचे उच्चालक, संयुक्तउच्चालक, साधें व संयुक्त चाक, सर्व प्रकारच्या कप्प्या, क्यापस्टन, मळसूत्र, मळसूत्राची दाबणी, अनंतमळसूत्र, उतरण, पाचर, सर्व बसविण्याची चौकट, शिवाय कलता बुरूज आघात व प्रत्याघात. दाखविण्याच्या गोळ्या. गुरुत्वमध्य दाखविण्याचीं यंत्रें, इत्यादि असतात. ७ ७ ०

या दोहोंपैकीं हवा तो संच ग्रिफिन आणि कंपनी किंवा न्यूटन आणि कंपनी यांजकडे सदर किमतीस विकत मिळतो ज्यांस पाहिजे त्यांस मी आणवून देईन.

त्यास यंत्रशास्त्र म्हणतात.

(२) प्रेरणा- ज्या कारणानें पदार्थाची गति किंवा स्थिति बदलते त्यास प्रेरणा असें म्हणतात. प्रेरणेनें पदार्थास गति प्राप्त होते किंवा गति असलेला पदार्थ स्थिर होतो, अगर त्याच्या गतींत फेरफार होतो, किंवा हे विकार करण्याचा कल तिच्या आंगीं असतो

जर पदार्थावर एकाच प्रेरणेचें कार्य घडेल तर तो स्थिर असल्यास त्याचें स्थलांतर होईल, आणि गति विशिष्ट असल्यास त्याच्या गतींत फेरफार होईल; परंतु दोन किंवा अधिक प्रेरणांचे पदार्थावर कार्य घडेल, तेव्हां पदार्थाचें स्थलांतर होईल किंवा जर अनेक प्रेरणांची कार्यें परस्पर नाश पावत असतील, तर पदार्थ स्थिर राहील, किंवा त्याच्या मूळच्या गतींत फेरफार होणार नाहीं. अशावेळीं त्या प्रेरणा **समतोल** आहेत असें समजावें.

(३) यंत्रशास्त्राचे दोन विभाग आहेत (१) **स्थिति-**

शास्त्र आणि (२) **गतिशास्त्र.** समतोल प्रेरणांच्या परस्पर संबंधांविषयींच्या नियमांचें ज्यांत विवरण केलें असतें त्यास **स्थितिशास्त्र** म्हणतात. आणि ज्या प्रेरणा समतोल नसून स्थिर पदार्थास गति देतात किंवा गतिविशिष्ट पदार्थाच्या गतींत विकार उत्पन्न करितात, त्यांच्या परिणामां विषयीं ज्यांत विवेचन असतें, त्यास **गतिशास्त्र** म्हणतात. स्थिति शास्त्रांत प्रेरणांचें समतोलन होण्यास त्या प्रेरणा विषयीं कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात यां विषयीं सांगितलें असतें; आणि गतिशास्त्रांत गति उत्पन्न होण्यास किंवा मूळच्या गतींत फेरफार होण्यास ज्या गोष्टी लागतात, त्यां विषयीं सांगितलें असतें.

(४) प्रेरणांचीं कार्यें अनेक साधनांनीं घडतात. त्यां पैकीं मुख्यत्वेंकरून **दाब, ताण** आणि **आकर्षण** या तिहीं विषयींच विचार या शास्त्रांत येईल.

दाब– जर एखादा पदार्थ हातानें किंवा दांड्यानें लोटिला, किंवा एका पदार्थावर दुसऱ्या पदार्थानें दाबिलें किंवा एकावर दुसरा आपटला; अगर पदार्थ टेबलावर ठेविला, किंवा हातांत धरिला म्हणजे टेबलाच्या किंवा हाताच्या प्रतिबंधामुळें तो खालीं पडत नाहीं; यांत दोहोंच्या संलग्न बिंदूंत ज्या प्रेरणेचें कार्य घडतें तीस **दाब** अशी संज्ञा देतात.

ताण– जर एखाद्या पदार्थास दोरीनें किंवा तारेनें किंवा दांड्यानें ओढिलें किंवा टांगिलें, तर दोरीच्या किंवा तारेच्या

सहाय्यानें जी प्रेरणा उत्पन्न केली तिला ताण अशी संज्ञा देतात. ज्या जोरानें म्हणजे प्रेरणेनें पदार्थ ओढिला असेल किंवा जेवढें वजन टांगिलें असेल तो जोर किंवा तें वजन सहन करण्याचें सामर्थ्य किंवा ताण दोरीच्या अंगीं असावा लागतो.

आकर्षण- जेव्हां दोन पदार्थ परस्पर कांहीं अंतरावर असतां एकाचें दुसऱ्यावर कार्य घडतें त्यास आकर्षण म्हणतात. चुंबकास न लागतां त्या जवळ लोखंडी सुई धरिली तर ती लोंहचुंबकाकडे ओढिली जाते. हातांतून पदार्थ फेंकला, तर तो जमिनीवर पडतो; कारण त्यास पृथ्वी आपल्याकडे ओढिते. तसेंच सर्व ग्रह सूर्याकडे आकर्षिले जातात.

वजन- ज्या जोरानें पृथ्वी पदार्थास आपल्याकडे ओढिते किंवा आकर्षण करिते त्यास पदार्थाचें **गुरुत्व** किंवा **वजन** असें म्हणतात.

पदार्थ पृथ्वीवर सोडिला असतां ज्या दिशेनें पृथ्वीवर पडेल किंवा निजकडे आकर्षिला जाईल त्या दिशेस लंबरेषा असें म्हणतात. आणि या रेषेशीं काटकोन करणारी जी पातळी तिला **क्षितिजपातळी** म्हणतात.

(५) प्रेरणेचें कार्य- कोणत्याही विवक्षित प्रेरणेपासून जें पदार्थावर कार्य घडेल त्याचें बरोबर ज्ञान होण्यास तीनगोष्टी समजाव्या लागतात.

(१) पदार्थावर कोणत्या स्थळीं प्रेरणेचें कार्य घडत

आहे.

(२) कोणत्या दिशेनें कार्य घडत आहे.

(३) प्रेरणेचें परिमाण, म्हणजे प्रेरणेच्या कार्यापासून केवढा जोराचा परिणाम घडत आहे.

पदार्थावर कोणत्या स्थळीं किंवा कोणत्या बिंदूच्या ठिकाणीं प्रेरणेचें कार्य होत आहे हें, भूमितींत ज्या प्रमाणें विवक्षित दिलेल्या दोन रेषांपासून किती अंतरावर दिलेला बिंदु आहेहें समजल्यानें जसें बिंदूचें स्थळ ठरवितां येतें त्याच प्रमाणें प्रेरणेचें कार्य घडण्याचा बिंदु किंवा स्थळ काढतां येईल. भूमितींत जशी सरळ रेषेची दिशा ठरवितात तशी प्रेरणेची दिशा ठरवितां येईल. प्रेरणेचे परिमाण कसे मापावे तें सांगतों.

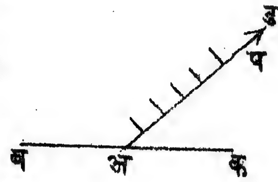
(६) प्रेरणा दर्शविण्याची रीति– मागील कलमांत प्रेरणेचें ज्ञान होण्यास ज्या तीन गोष्टींची अवश्यकता सांगितली, त्यावरून हें सहज लक्षांत येईल कीं प्रेरणा सरळ रेषांनीं दर्शवितां येतील; कारणः—

(१) कोणत्याही बिंदूपासून सरळ रेषा काढितां येते; ज्या स्थळीं किंवा ज्या बिंदूवर प्रेरणेचें कार्य होत असेल तेथूनसरळ रेषा काढितां येईल.

(२) सरळ रेषा पाहिजे त्या दिशेनें काढितां येते; म्हणजे एकाद्या स्थीर रेषेशीं विवक्षित कोन करणारी रेषा काढितां येते. यास्तव ज्या दिशेनें प्रेरणेचें कार्य घडतअ-

सेल त्या दिशेनें सरळ रेषा काढितां येईल.

(३) प्रेरणेचें जें मान म्हणजे परिमाण असेल त्या प्रमाणानें रेषेची लांबी घेऊन प्रेरणेचें परिमाण दर्शवितां येईल. उदाहरण; जर प्रेरणा ४ शेरांची असेल आणि जर आपण असें ठरविलें कीं, अच्छेर किंवा एक पौंड मापाची प्रेरणा एक इंच लांब रेषेनें दर्शवावयाची, तर ४ शेरांची प्रेरणा ८ इंच लांब रेषेनें दर्शवितां येईल. उदाहरणार्थ समजा कीं, एक ३ शेरांची किंवा ६ पौंडांची प्रेरणा क्षितिजाच्या पातळींत असलेल्या रुळाच्या मध्यावर क्षितीजाशीं ४५° कोन करणाऱ्या दिशेनें कार्य करीत आहे. जर ब क रेषा तो रूळ दर्शविण्यास घेतली तर तिचा मध्य अ बिंदु काढावा. त्या ठिकाणीं अ क शीं ४५° चा



कोन करणारी अ ड रेषा काढावी नंतर दर पौंडास एक इंच याप्रमाणें ६ इंच लांबीची रेषा अ प घेतली म्हणजे ती दिलेली प्रेरणा दर्शवील. परंतु प्रेरणा अ बिंदूखालीं रुळास खालीं दाबीत आहे किंवा वर ओढीत आहे हें एवढ्यावरून समजत नाहीं. प्रेरणेचें कार्य कोणत्या रेषेंत होत आहे हें मात्र अ प दर्शविते. परंतु अ पासून प कडे किंवा प पासून अ कडे हा बोध होत नाहीं. हा बोध होण्यासाठीं ज्या दिशेस कार्य होतें त्या बाजूस तिराचें टोक काढून दिशा

दर्शविनात यास्तव मेरणेची दिशा आणि कार्य दर्शकरेषा यांमधील भेद लक्षांत ठेविला पाहिजे.

(७) दृढपदार्थ– द्रव्याचे अनेक अणु अगर कण एकत्र होऊन पदार्थ बनला आहे असें कल्पिलें आहे. ज्या पदार्थांत हे कण परस्पर नियत अंतरावर नित्य असतात त्या पदार्थास **दृढ** पदार्थ हें नांव देतात.

दृढ पदार्थ इतका घट्ट असतो कीं, तो कधीं आकुंचन व प्रसरण पावणार नाहीं, व कधीं भंग पावणार नाहीं. असा दृढपदार्थ सृष्टींत कधींही मिळणार नाहीं. प्रेरणांच्या कार्यानें प्रत्येक पदार्थांच्या कणांचें जास्त कमी स्थलांतर होईल. यास्तव हें हिशेबांत घेऊन गणित करितांना पदार्थाच्या काल्पनिक दृढतेंत फेर पडला आहे हें काढावें लागेल. परंतु हा विषय यंत्रशास्त्राच्या अति गहन शाखेंतील असल्यानें त्याचा विचार या छोट्या व सोप्या ग्रंथांत न करितां ज्या पदार्थांवर प्रेरणांची कार्यें होतात ते वरील व्याख्ये प्रमाणें दृढ आहेत असें कल्पिलें आहे.

(८) परिणामी प्रेरणा– पदार्थावर अनेक प्रेरणांचें कार्य होत असतां त्या सर्व प्रेरणांच्या कार्याच्या बरोबरीचें कार्य करणारी जी एक प्रेरणा तिला त्यांची **परिणामी प्रेरणा** असें म्हणतात, आणि त्या अनेक प्रेरणांस तिचे **अवयव** असें म्हणतात. दोन किंवा अधिक प्रेरणांच्या बरोबरीची एक प्रेरणा काढणें यास **प्रेरणैकीकरण** आणि एका प्रेरणेचे पृथक्करण क-

रून तिच्या बरोबरीचें कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणा काढणें यास **प्रेरणापृथक्करण** म्हणतात.

(९) प्रेरणा मापणें— स्थिति शास्त्रांत प्रेरणांच्या कार्यापासून पदार्थास गति प्राप्त होत नाहीं. प्रेरणांचीं कार्यें परस्पर नाश पावून पदार्थ स्थिर राहातो. यास्तव विवक्षित प्रेरणेपासून जी पदार्थास गति मिळेल त्यावरून तिला मापितां येणार नाहीं. विवक्षित प्रेरणा प्रमाणभूत कल्पून त्यावरून प्रेरणा मापिल्या पाहिजेत. एक शेर वजन उचलण्याचें ज्या प्रेरणेच्या आंगीं सामर्थ्य असेल त्या प्रेरणेस १ शेराची प्रेरणा असें म्हणावें. ज्या प्रेरणेनें २ शेरांचें वजन उचलतां येईल तीस दोन शेरांची प्रेरणा असें म्हणावें; आणि **क** शेर वजन ज्या प्रेरणेनें उचलतां येईल ती **क** शेरांची प्रेरणा समजावी. पदार्थास जें वजन असतें तें केवळ त्यावरील पृथ्वीच्या आकर्षणाचें फल आहे. विवक्षित पदार्थाचें वजन एक शेर आहे, याचा अर्थ इतकाच कीं त्यास पृथ्वी १ शेराच्या जोरानें आपल्याकडे ओढीत आहे. या करितां एक शेर वजनाच्या पदार्थास पृथ्वीकडे न जाऊं देतां, ज्या प्रेरणेनें पृथ्वीचें आकर्षण ज्या दिशेनें घडतें त्याच्या उलट दिशेनें तो वर उचलिला जातो, त्या प्रेरणेस एक शेराची म्हणजे पदार्थाच्या वजना इतक्या जोराची प्रेरणा म्हणावी हें स्वाभावीक आहे. तसेंच जी दोरी एक शेर वजन तोलून धरूं शकते तिचा ताण किंवा जोर एक शेराचा आहे असें म्हणतात.

(१०) यंत्रस्थिति शास्त्राचे सिद्धांत सिद्ध करण्यास कांहीं प्रत्यक्ष प्रमाणें सिद्धवत् घ्यावीं लागतील तीं सांगतों. हीं प्रत्यक्ष प्रमाणें इतकीं सकृद्दर्शनीच स्पष्ट व सुगम आहेत कीं, त्यां विषयीं विशेष चर्चा करण्याची गरज नाहीं.

प्रत्यक्षप्रमाण १ – जर दोन समान प्रेरणा एका पदार्थावर एकाच सरळ रेषेंत परस्पर उलट अशा दिशांनीं कार्य करतील तर तो पदार्थ स्थिर किंवा समतोल राहील.

प्रत्यक्षप्रमाण २ – जर दोन परस्पर उलट दिशांनीं एकाच सरळ रेषेंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा पदार्थास समतोल किंवा स्थिर ठेवितील तर त्या प्रेरणा समान असतील.

प्रत्यक्षप्रमाण ३ – जर पदार्थ स्थिर असेल, तर त्यावर कार्य करणाऱ्या सर्व प्रेरणांच्या बरोबर दोन समान व परस्पर उलट अशा प्रेरणा काढितां येतील व मुळच्या प्रेरणांच्या जागीं या दोन प्रेरणा लाविल्यास पदार्थाच्या स्थिरतेंत फेर पडणार नाहीं.

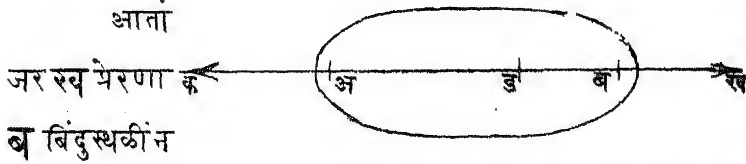
(११) प्रत्यक्षप्रमाण ४ – **प्रेरणेचें संचरत्व** – जेव्हां एखादी प्रेरणा समतोल असणाऱ्या पदार्थावर कार्य करीत असेल, तेव्हां ती प्रेरणा तिच्या कार्यदर्शक रेषेंत पदार्थाशीं दृढतर जोडलेल्या अशा कोणत्याही दुसऱ्या बिंदुस्थळीं लाविली तरी तिच्या कार्यांत फेर पडणार नाहीं.

आपल्या कार्यदर्शक रेषेंत प्रेरणेनें एका बिंदूपासून त्या-

शीं दृढतर जोडलेल्या अशा दुसऱ्या कोणत्याही बिंदुस्थळीं संचार केला तरी परिणाम तेवढाच होतो, म्हणजे प्रेरणा कार्यदर्शक रेषेंत कोठेंही संचार करूं शकते. उदाहरणार्थ—

समजा कीं, **क**, **ख** या दोन समान व उलट प्रेरणा **अ ब** या सरळ व दृढ रूळावर कार्य करतील, तर रूळ समतोल राहील.

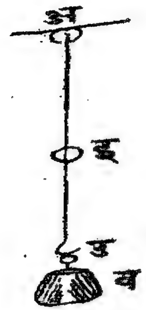
आतां जर ख प्रेरणा **ब** बिंदुस्थळींन



लावितां तिच्या कार्यदर्शक रेषेंत दुसऱ्या कोणत्याही रूळाच्या बिंदूंत लाविली, तरी ती **क** शीं समान व उलट असल्यानें रूळास समतोल ठेवील. सारांश **ख** प्रेरणा तिच्या कार्यदर्शक रेषेंत **ब**, **क**, **ड** किंवा दुसऱ्या कोणत्याही दृढपदार्थाच्या बिंदुस्थळीं लाविली, तरी तिचा परिणाम सारखाच होईल. पदार्थाचे सर्व कण एकमेकांस दृढतर जोडिले असल्यानें कोणत्याही ठिकाणीं प्रेरणेचें कार्य घडलें तरी तें सर्व पदार्थावर होतें हें प्रत्यक्ष प्रमाण यंत्रस्थिति शास्त्रांतील अत्यंत महत्वाचें आहे व त्याच्या सत्यतेवर त्याची सर्व इमारत बांधिलेली आहे. प्रेरणेच्या संचरत्वाचें आणखी एक उदाहरण देतों.

अ ई उ ही सांखळी **अ** स्थळीं तुळईच्या आंकड्यास टांगिली आहे, व तिच्या दुसऱ्या **उ** शेवटास **व** हें वजन टांगिलें आहे. यास्तव आंकड्यावर एकंदर दाब (**व**+ **अ उ** सां-

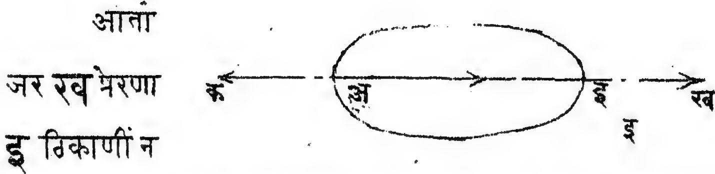
खळीचें वजन) इतका पडेल. आतां जर उ ठिकाणचें वजन काढून इ ठिकाणीं लाविलें तर आंकड्यावर दाब (व + अ इ सांखळीचें वजन) इतका पडेल. यावरून व वजन उ ठिकाणीं किंवा इ ठिकाणीं लाविलें तरी त्याचा परिणाम सारखाच होतो.



(१२) प्रत्यक्ष प्रमाण ५.- दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा असतो.- प्रेरणेचें कार्य करण्यास ज्या दोरीचा उपयोग करितात, ती दोरी दृढ आहे असें कल्पितात. म्हणजे ती प्रसरण व आकुंचन पावत नाहीं, आणि तिच्या कणांतील परस्पर अंतरें सारखीं असतात. प्रेरणेचें कार्य दोरीच्या द्वारेंच होतें. प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेंत दोरी असते. यास्तव मागील प्रत्यक्ष प्रमाणावरून प्रेरणा दोरीच्या कोणत्याही भागीं लाविली तरी प्रेरणेच्या एका बिंदूपासून दुसऱ्या त्याशीं दृढतर जोडलेल्या बिंदूवर संचार होईल, व तेणेंकरून तिच्या कार्यांत फेर पडणार नाहीं. यास्तव दोरीच्या कोणत्याही भागीं प्रेरणा कार्य करील. तरी तितकाच परिणाम होईल. म्हणून दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा असतो. आतां एक दोन उदाहरणें देतों.

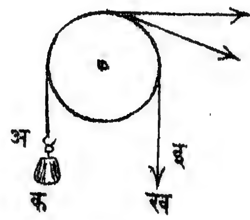
अ, इ दोरीच्या शेवटास क, ख या दोन उलट प्रेरणा ओढीत असल्या आणि दोरी समतोल राहिली तर त्या समान असल्या पाहिजेत.

आतां जर ख प्रेरणा इ ठिकाणीं न



लावितां जर दुसऱ्या उ ठिकाणीं लाविली, तरी दोरी समतोल राहण्यास **क** प्रेरणा **ख** बरोबर असलीच पाहिजे. सारांश **ख** प्रेरणा दोरीच्या कोणत्याही भागीं लाविली तरी समतोलपणास ती **क** बरोबर असावी लागेल. याजवरून **क**च्या बरोबरीची, पण उलट अशी **ख** प्रेरणा दोरीच्या कोणत्याही भागीं लाविली तरी हरकत नाहीं हें उघड आहे.

अ उ इ ही दोरी **उ** या साफ व गुळगुळीत खुंटीवरून ताणलेली आहे. आतां जर ती समतोल राहिली पाहिजे तर तिच्या दोहों शेवटांस लाविलेल्या **क, ख** प्रेरणा समान असल्या पाहिजेत. म्हणजे **क** प्रेरणेस समतोल धरण्यास खुंटीवरून दोरी गेली आहे तरी खुंटीच्या दुसऱ्या बाजूकडील दोरीस **क**च्या बरोबरीचीच **ख** प्रेरणा लागते. मग ती गुळगुळीत खुंटीवरून जाणाऱ्या दोरीस कोठें ही **लाविली**, म्हणजे दोरीच्या **अ क** व **अ ख** भागांमध्यें कोणताही कोनझाला तरी तिचा परिणाम तेवढाच होतो. या प्रमाणें खुंटीच्या जागीं कप्पी असली व तिजवरून दोरी गेली तरी हाच परिणाम होतो



(१२) प्रत्यक्ष प्रमाण ६- प्रेरणारोहण — जर ए-

काद्या दृढ पदार्थावर अनेक प्रेरणा कार्य करीत असतील आणि पदार्थ समतोल असेल तर त्याच पदार्थावर आणखी समतोल अशा प्रेरणांचें कार्य झालें, किंवा मूळच्या प्रेरणांपैकीं कांहीं समतोल प्रेरणा काढून टाकिल्या तरी पदार्थ समतोल राहील, म्हणजे मुळच्या प्रेरणांच्या परिणामांत फेर बदल होणार नाहीं. ही गोष्ट इतकी स्पष्ट व उघड आहे कीं, याची चर्चा करण्याची मुळीच गरज नाहीं. समतोल अशा कांहीं प्रेरणांचें आरोहण किंवा अवरोहण झालें तरी त्या परस्पर समतोल असल्यानें पदार्थावर नवीन कार्य घडणार नाहीं.

(१४) अनुभवावरून आपणास माहीत आहे कीं विवक्षित आकाराच्या एका पदार्थाचें वजन तेवढ्याच आकाराच्या दुसऱ्या पदार्थाच्या वजनाबरोबर सर्वदां नसतें. एक घन फूट शिसें, आणि एक घन फूट लोखंड आणि एक घनफूट कापूस यांचें वजन सारखें नसतें. ५ घनफूट शिशाचें वजन ७ घनफूट लोखंडा इतकें असतें. आणि एक घनफूट लोखंडाचें वजन कित्येक घनफूट कापसा इतकें असतें. म्हणून शिसें लोखंडाहून जड आणि लोखंड कापसाहून जड असें म्हणतों; किंवा शिशाचें दार्ढ्य लोखंडाहून जास्त आणि लोखंडाचें कापसाहून जास्त असें समजतों.

जेव्हां पदार्थाच्या कोणत्याही भागाचें वजन त्या भागाच्या आकाराच्या प्रमाणांत असतें, तेव्हां तो पदार्थ सर्वत्र **सारख्या दार्ढ्याचा** किंवा **समरूप** आहे असें म्हणतों. दोन समरूप पदार्थांचीं दार्ढ्यें त्यांच्या समान आकाराच्या वजना-

च्या प्रमाणांत असतात. यास्तव समरूप किंवा सर्वत्र सारख्या दार्ढ्याचा पदार्थ प्रमाणभूत घेऊन त्याचें दार्ढ्य एक कल्पून त्याशीं इतर पदार्थांच्या दार्ढ्यांची तुलना करितों. दार्ढ्य मापण्यास पाणी प्रमाणभूत घेतात, आणि त्याच्या कितीपट दुसरा पदार्थ हलका किंवा जड आहे हें पाहतात व त्या पटीच्या संख्येस त्या पदार्थाचें दार्ढ्य असें म्हणतात. एक घन इंच तांब्याचें वजन एक घनइंच पाण्याच्या सुमारें नऊपट असतें, म्हणून तांब्याचें दार्ढ्य ९ या संख्येनें दर्शवितात.

प्रकरण १ लें यावर प्रश्न.

(१) यंत्रशास्त्र, प्रेरणा आणि समतोल प्रेरणा यांच्या व्याख्या सांग, आणि स्थितिशास्त्र व गतिशास्त्र यांमधील भेद दाखीव.

(२) प्रेरणेची दिशा व परिमाण कसें दर्शवितात?

(३) प्रेरणेची दिशा व प्रेरणा दर्शक रेषा यांमध्यें भेद काय?

(४) प्रेरणा कशा मापितात तें सांग? १० शेरांची प्रेरणा असें मोघम सांगितलें असल्यास त्याचा अर्थ काय समजावा?

(५) प्रेरणेचें संचरत्व आणि प्रेरणारोहण म्हणजे काय?

(६) दृढ पदार्थ म्हणजे काय? दोरीचा ताण सर्वभागीं

सारखा असतो हें स्पष्ट करा?

उदाहरणें.

(१) जर १० पौंडांची मेरणा सव्वा फूट लांबीच्या रेषेनें दर्शवितात तर तीन फूट नऊ इंच लांबीची रेषा किती पौंडाची मेरणा दर्शवील.

(२) एक इंच लांबीची रेषा ८० पौंडांची मेरणा दर्शविते तर एक खंडी जोराची मेरणा दर्शविण्यास किती इंच लांबीची रेषा घ्यावी.

(३) **क** शेरांची मेरणा **अ** इंच लांबीची रेषा दर्शविते, तर **इ** इंच लांबीची रेषा किती शेरांची मेरणा दर्शवील.

(४) एका दोरीच्या शेवटास ५ शेरांचें वजन टांगिलें आहे व तिच्या मध्यभागीं १० शेरांचें टांगिलें आहे तर दोरीच्या दोहों भागांचा ताण काय असेल?

(५) ४ शेर पितळेचा गोळा ५ शेर शिशाच्या गोळ्या एवढा आहे. तर त्यांच्या दार्ढ्यांमध्यें काय प्रमाण असेल?

(६) एका पदार्थाच्या ५ घन इंचांचें वजन दुसऱ्याच्या ७ घन इंचांच्या वजना बरोबर आहे, तर त्यांच्या दार्ढ्यांतील प्रमाण काय?

(७) एका पदार्थाच्या एक घनफुटाचें वजन १ मण आहे; दुसऱ्या एका पदार्थाचें दार्ढ्य याच्या ५ पट आहे; तर त्याचा ५ मण वजनाचा तुकडा घेतला तर त्याचा आकार काय असेल?

प्रकरण २

एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणा.

प्रेरणैकीकरण आणि प्रेरणा पृथक्करण.

(१५) जर एकाद्या पदार्थीवर किंवा एकाद्या बिंदूवर अनेक प्रेरणा कार्य करीत असतील, तर त्यांच्या योगानें पदार्थ कोणत्या तरी दिशेनें चलन पावेल. आतां ज्या दिशेस पदार्थ चलन पावत आहे, त्याच्या उलट दिशेस अशी एक प्रेरणा लावितां येईल कीं तिच्या योगानें पदार्थ स्थिर राहील. यावरून ही नवी प्रेरणा पदार्थावर कार्य करणाऱ्या सर्व प्रेरणांस समतोल ठेविते. जर या सर्व प्रेरणा काढून त्यांच्या जागीं या नव्या प्रेरणे एवढीच, पण तिच्या उलट दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा लाविली तर पदार्थ स्थीरच राहील. म्हणून या प्रेरणेचा परिणाम पदार्थावर कार्य करणाऱ्या मूळच्या अनेक प्रेरणां इतका झाला. यास्तव अनेक प्रेरणांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी जी प्रेरणा तीस परिणामी किंवा फलित प्रेरणा म्हणतात.

दोन किंवा अधिक प्रेरणा पदार्थावर कार्य करीत असल्यास त्यांच्या बरोबरीची एक प्रेरणा काढणें यास **प्रेरणैकीकरण** म्हणतात; प्रेरणैकीकरण यंत्रस्थितिशास्त्राची

अत्यंत महत्वाची शाखा आहे. त्याच्या उलट म्हणजे एकाप्रेरणेच्या बरोबरीचा परिणाम उत्पन्न करणाऱ्या अनेक प्रेरणा काढणें त्यास **प्रेरणापृथक्करण** म्हणतात.

या प्रकरणांत **प्रेरणैकीकरणा**चा म्हणजे दोन किंवा अधिक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी याचा विचार केला आहे. प्रेरणा पदार्थावर अनेक रीतींनीं कार्य करितील. (१) प्रेरणा एकाच रेषेंत एकाच दिशेनें किंवा परस्पर उलट अशा दिशानीं कार्य करितील. (२) पदार्थावर एकाच स्थळीं त्या भिन्न भिन्न दिशांनीं कार्य करितील. (३) किंवा अनेक दिशांनीं पदार्थावर अनेक स्थळीं कार्य करतील. या तिन्ही रीतीनीं कार्य करीत असतां त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी तें पाहूं.

(१६) दोन किंवा अधिक प्रेरणा पदार्थावर एकाच स्थळीं म्हणजे एकाच बिंदूवर एकाच रेषेंत कार्य करीत असल्यास त्यांची परिणामी प्रेरणा काढणे.

जर एक धोंडा ओढण्यास दोन घोडे लाविले, तर दोघांच्या शक्तींच्या बेरजे इतक्या शक्तीनें धोंडा ओढला जाईल. तीन, चार किंवा अधिक घोडे एकाच दिशेनें ओढण्यास लाविले, तर त्या सर्वांच्या शक्तींच्या बेरजे इतक्या जोरानें पदार्थ ओढला जाईल. बरें जर दोन घोडे परस्पर उलट दिशांनीं पदार्थास ओढितील, तर जेव्हां दोघे सारख्या जोराचे असतील तेव्हां पदार्थ स्थिर राहील; जेव्हां त्यांच्या शक्ती सारख्या

नसतील, म्हणजे ज्याची जास्त शक्ति असेल त्या दिशेस पदार्थ चलन पावेल. परंतु त्याच्या सर्व शक्तीनें जितका धोंडा ओढला जावा तितका जाणार नाहीं. तर उलट दिशेस जो घोडा ओढीत आहे त्यास प्रतिबंध करण्यास जेवढी शक्ति पाहिजे तेवढी जाऊन जी जास्त राहील तेवढ्या शक्तीनें मात्र धोंडा चलन पावेल. म्हणजे दोघांच्या शक्तींच्या अंतरा इतक्या शक्तीनें मात्र जास्त जोराचा घोडा पदार्थास आपल्याकडे ओढील. तसेंच जर एका दिशेस कांहीं घोडे आणि त्याच्या उलट दिशेस कांहीं घोडे ओढीत असले, तरी ही दोहोंकडील घोड्यांच्या जोरांच्या अंतरा इतका जास्त जोर ज्या दिशेस असेल त्या दिशेकडे धोंडा ओढला जाईल.

उदाहरणार्थ— जर **क, ख** या दोन प्रेरणा **न** पदार्थास एकाच **न ब** दिशेस ओढितील तर त्यांच्या बेरजे बरोबर त्यांची परिणामी प्रेरणा होईल.



परिणामी प्रेरणा दर्शविण्यास **प** अक्षर घेतलें तर

$$क + ख = प.$$

जर **क, ख** प्रेरणा उलट दिशांनीं कार्य करितील तर

$$क - ख = प.$$

जर **क, ख** समान परिमाणाच्या प्रेरणा असतील तर पदार्थ स्थिर राहील. आणि परिणामी प्रेरणा असणार नाहीं.



कारण पदार्थ कोणत्याच दिशेस चलन पावणार नाहीं.

$$\text{क} - \text{ख} = ००$$

जर क_1, क_2, क_3, क_4, इत्यादि अनेक प्रेरणा एकाच दिशेस कार्य करितील तर,

$$\text{क}_1 + \text{क}_2 + \text{क}_3 + \text{क}_4 = \text{प}.$$

आतां जर क_1, क_2, क_3 ······ इत्यादि प्रेरणा एका दिशेस आणि ख_1, ख_2, ख_3, ख_4 इत्यादि प्रेरणा उलट दिशेस कार्य करीत असतील तरः-

$$(\text{क}_1 + \text{क}_2 + \text{क}_3) - (\text{ख}_1 + \text{ख}_2 + \text{ख}_3) = \text{प}.$$

एवढें लक्षांत ठेवावें कीं, जर क_1, क_2 वगैरे ज्या दिशेस कार्य करीत आहेत त्या दिशेस धनदिशा आणि त्या दिशेस कार्य करणाऱ्या प्रेरणांस धन कल्पिलें तर त्याच्या उलट दिशेस कार्यकरणाऱ्या प्रेरणांस ऋण मानावें, आणि त्या प्रेरणादर्शक चिन्हांमागें ऋणचिन्ह लिहावें. असें केलें तर एका रेषेंत कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांच्या केवळ बेरजेबरोबर परिणामी प्रेरणा असते.

जर उलट सुलट कार्य करणाऱ्या प्रेरणा क, ख, ग, घ, च, छ, ज अशा असल्या आणि ख, च आणि छ ऋण असल्या तरः-

$$क - ख + ग + घ - च - छ + ज = प.$$

ज्या वेळीं या सर्व प्रेरणांची बेरीज शून्य होईल, तेव्हां त्यांस परिणामी प्रेरणा असणार नाहीं; म्हणजे त्यांच्या कार्यानें पदार्थ कोणत्याच दिशेस चलन न पावतां स्थिर राहील, अशावेळीं त्या समतोल आहेत असें समजावें, आणि अशा प्रेरणा समतोल असण्यास त्यांची बेरीज शून्य असणें म्हणजे परिणामी प्रेरणा शून्य असणें अवश्य आहे.

यास्तव एकाच रेषेंत कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांचें समतोलत्व दर्शविणारें समीकरण असें होईल;

$$क_1 + क_2 + क_3 + क_4 + क_न = 0$$

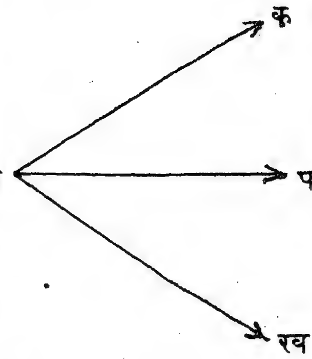
(१७) भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणांचीं परिणामी प्रेरणा काढणें.

हा सिद्धांत यंत्रस्थितिशास्त्रांतील फार महत्वाचा असून यावरच मुख्यत्वें करून या शास्त्राची इमारत उभारलेली आहे. हा पायाभूत सिद्धांत सिद्ध करण्या पूर्वीं कांहीं गोष्टी सांगणें अवश्य आहेत, त्या सांगून सिद्धांत सिद्ध करूं.

समजा कीं, **क** आणि **ख** या दोन प्रेरणा एका पदार्थावर **अ** बिंदुस्थळीं भिन्न दिशांनीं कार्य करीत आहेत, या दोन्ही प्रेरणा दर्शविण्यासाठीं **अ क** आणि **अ ख** या दोन रेषा, प्रेरणा ज्या दिशांनीं कार्य करीत आहेत त्या दिशांनीं व प्रेरणांच्या प्रमाणांत लांबीनें अशा काढा१ व दिशा दर्शविण्या

स शेवटीं तिरांचीं टोकें काढा १

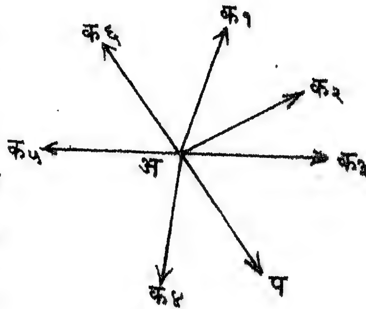
हें स्पष्ट आहे कीं, **क** प्रेरणेचा परिणाम **अ** बिंदूस **अ, क** रेषेंत गति देण्याचा आहे, आणि **ख** चा **अ ख** रेषेंत गति देण्याचा आहे आतां दोनही प्रेरणा एकदम कार्य करीत आहेत, परंतु **अ** बिंदु दोनही दिशांनीं एक काळीं चलन पावणार नाहीं हें उघड आहे; तर दोनही प्रेरणा एकदम कार्य करितील तेव्हां **अ** बिंदु **अ क** व **अ ख** या दोहोंच्या मध्यंतरी कोण त्या तरी दिशेनें चलन पावेल. समजा कीं, **अ प** ही एक प्रेरणा **अ** बिंदूवर तेवढाच परिणाम उत्पन्न करिते, तर त्या दोन प्रेरणांच्या जागीं ही एक प्रेरणा लाविली तरी **अ** बिंदूवर तेवढाच परिणाम होणार आहे म्हणून **अ, प** किंवा **प** ही **क** व **ख** यांच्या बरोबरीची किंवा परिणामी प्रेरणा होय. या परिणामी प्रेरणेची दिशा व परिमाण आम्हांस काढणें आहे. तसेंच जर **क, ख, ग, घ, च, छ** इत्यादि अनेक प्रेरणा **अ** बिंदूवर भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करतील, तर या सर्वांच्या एवढाच परिणाम उत्पन्न करणारी एक **प** प्रेरणा असूं शकेल. कारण **क, ख** यांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी **प**, प्रेरणा असेल तर **क, ख** या प्रेरणांच्या जागीं एकटी **प**, प्रेर-



णा ठेवितां येईल. नंतर $प_1$ आणि ग यांच्या जागीं यांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी $प_2$ ही प्रेरणा ठेवितां येईल. या प्रमाणें करीत गेल्यास सर्व प्रेरणांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी प ही प्रेरणा निघेल.

(१८) यावरून हें ही उघड आहे कीं, जर अनेक प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करीत असून पदार्थ स्थिर राहील, तर त्यांपैकीं कोणतीही एक प्रेरणा बाकी सर्व प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेच्या बरोबरीची व उलट दिशेनें कार्य करणारी असेल.

समजा कीं, $क_1$ $क_2$ $क_3$ $क_4$ .... $क_6$ अशा सहा प्रेरणा अ बिंदूवर कार्य करीत असतां अ बिंदु स्थिर राहतो.



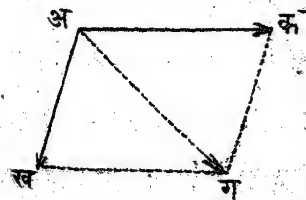
मागील कलमांत सांगितल्या प्रमाणें $क_1$ $क_2$ .... $क_5$ अशा पांच प्रेरणांच्या जागीं त्यांच्या बरोबरीचें कार्य करणारी एक प्रेरणा अ प ठेवितां येईल. आतां ज्या पेक्षां साही प्रेरणांच्या कार्यानें अ बिंदु स्थिर राहतो, त्यापेक्षां बाकी राहिलेली सहावी प्रेरणा अ $क_6$ आणि अ प पांचांची परिणामी प्रेरणा या समान व परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या असल्या पाहिजेत. या प्रमाणें दुसऱ्या कोणत्याही पांच प्रेरणा घेऊन त्यांची परिणामी प्रेरणा बाकी राहिलेल्या प्रेरणेशीं परि-

माणानें समान व दिशेनें उलट अशी असेल. यास्तव जेव्हां अनेक प्रेरणा समतोल असतील तेव्हां त्यांपैकीं कोणतीही एक प्रेरणा बाकी प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेशीं समान व उलट अशी असेल.

आम्हीं जेव्हां एकाद्या रेषेस प्रेरणा असें म्हणतों तेव्हां ती रेषाच प्रेरणा आहे असें न समजतां प्रेरणा दर्शविणारी रेषा असें समजावें. आतां भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी तें सांगतो.

(१९) दोन प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण व तिची दिशा पुढील सिद्धांतानें काढितां येते तो सिद्धांत असा आहेः-

पदार्थावर एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांची परिमाणें व दिशा दर्शविण्यास त्या बिंदूतून काढिलेल्या दोन रेषा घेतल्या आणि ज्याच्या या दोन रेषा जवळजवळच्या बाजू आहेत, असा समांतर भुज चौकोन काढिला, तर मूळ बिंदूतून जाणारा जो याचा कर्ण तो दोन्हीं प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण व दिशा दर्शवील. या सिद्धांतास **प्रेरणा समांतर भुज चौकोन** असें म्हणतात.

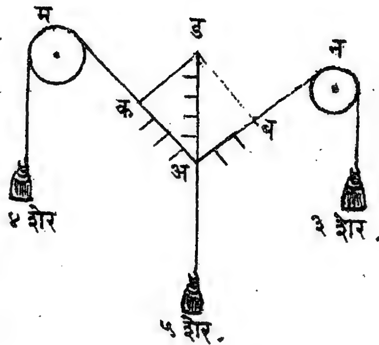


जर अ क आणि अ ख या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शवितील आणि या ज्याच्या जवळ जवळच्या बाजू आहेत असा त्यांवर अ क ग-

ख हा समांतरभुज चौकोन काढिला तर **क, ख** यांची परिणामी प्रेरणा **अ, ग** रेषा दर्शवील.

(२७) प्रथमतः या सिद्धांताची सत्यता प्रत्यक्ष प्रयोगानें कशी पहावी तें सांगतों.

म आणि **न** या दोन लहान कप्प्या उभ्या भिंतींत बसविल्या आहेत. ३ शेर व ४ शेर हीं वजनें जिच्या शेवटांस अडकविलीं आहेत अशी दोरी या दोहों कप्प्यांवरून सोडिली आहे. आतां दोहोंकप्यां मधील दोरीच्या भागांतील एक **अ** बिंदुस्थळीं ५ शेरांचें वजन टांगिलें तर हें वजन दोरीस खालीं ओढील आणि **म अ न** कोन करून सर्व वजनें स्थिर होतील.



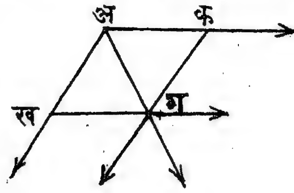
अ, म आणि **अ, न** या दोऱ्या अनुक्रमें ४ शेर व ३ शेर जोरानें ओढीत आहेत. यांची परिणामी प्रेरणा ५ शेर वजना इतकी व त्याच्या उलट दिशेनें कार्य करणारी आहे.

अ न दोरींत तीन समान भाग पाडलेला **अ ब** भाग घे आणि तेवढाले चार भाग पाडलेला **अ क** भाग **अ म** दोरीचा घे **अ-ब ड क** हा समांतर भुज चौकोन पुराकर. तर असें अनुभवास येईल कीं, **अ, ड** क्षितिजांशीं लंब असेल. म्हणून ५ शेर वजन ज्या दिशेनें कार्य करीत आहे त्याच दिशेंत असेल. जर **अ, ड** ची लांबी

मोजिली तर अ ब अ क यांचे जेवढाले ३ व ४ भाग पाडिले आहेत तेवढाले अ ड मध्यें पांच भाग असतील, म्हणून अ ड रेषा अब व अ क या रेषा ज्या प्रेरणा दर्शविनात त्यांची परिणामी प्रेरणा परिमाणानें व दिशेनें दर्शविते.

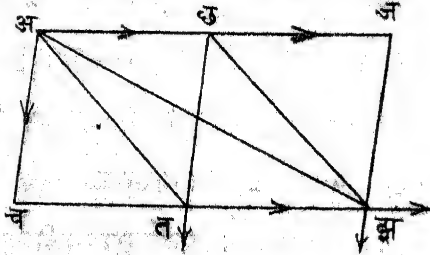
(२१) आतां प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाचा सिद्धांत सिद्ध करूं.

जेव्हां दोन प्रेरणा समान असतील तेव्हां त्यास दर्शविणाऱ्या रेषांवरील समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवील. जर अ क, अ ख या दोन समान प्रेरणा अ स्थळीं कार्य करीत असतील, तर त्यां वरील अ क ग ख समांतर भुज चौकोनाचा कर्ण अ ग त्यांच्या परिणामी प्रेरणची दिशा होईल. कारण अ क ग ख याच्या चारी बाजू समान असल्यामुळें अ ग कर्ण क अ ख कोनास दुभागील. ज्यापेक्षां अ क, अ ख या समान प्रेरणा आहेत, त्यापेक्षां त्यांची परिणामी प्रेरणा अ क कडे जास्त वळलेली असणार नाहीं; किंवा अ ख-कडेही असणार नाहीं. म्हणून ती बरोबर दोहोंच्या मध्यें असेल म्हणजे दोहों मधील कोनास दुभागणाऱ्या रेषेंतच ती कार्य करील. प्रेरणा संचरत्वाच्या नियमाप्रमाणें अ ग प्रेरणा ड ठिकाणीं लाविलीवरी तेवढाच परिणाम होईल. तसेंच अ-ग च्या जागीं ड स्थळीं क, ख प्रेरणा लाविल्या तरी परिणाम तेवढाच होईल.



(२) जर एका बिंदूवर क आणि २क या प्रेरणा कार्य करीत असतील, तरीही त्यांवरील समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाच्या दिशेनें त्यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करील.

क, ख, ग या तीन समान प्रेरणा आहेत. क प्रेरणा अ स्थळीं अ च रेषेंत कार्य करिते; आणि ख, ग या अ स्थळीं अ छ ज या एकाच रेषेंत कार्य करितात.

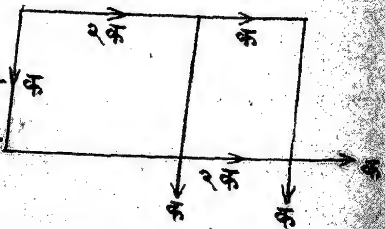


अ च आणि अ छ या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शविण्या जोग्या घे; ग प्रेरणा अ, ज रेषेत कोणत्याही स्थळीं कार्य करीत आहे असें घेतलें तरी हरकत नाहीं; म्हणून ग प्रेरणा छ स्थळीं कार्य करीत आहे असें घे, आणि छ ज रेषा तिचें परिमाण दर्शविण्यास घे.

आतां अ च त छ आणि त झ ज छ हे समांतर भुज चौकोन काढ, आणि अ त, छ ज हे कर्ण काढ. वर सिद्ध केल्या प्रमाणें अ च व अ छ या समान प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अ त दिशेनें कार्य करील. अ च व अ छ या प्रेरणांच्या जागीं त्यांचीही परिणामी प्रेरणा कार्य करीत आहे असें घेऊं. ही प्रेरणा अ त रेषेंत कोणत्याही ठिकाणीं कार्य करीत आहे असें समजण्यास हरकत नाहीं. ती त स्थळीं कार्य करीत आहे असें समजूं. आतां त स्थळीं क, ख प्रेरणा अ च, अ छ रेषांशी स-

मांतर अशा छ त आणि त झ या रेषांत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा ठेव. समजा कीं क प्रेरणा त स्थळीं कार्य न करितां छ स्थळीं कार्य करीत आहे व ख प्रेरणा झ स्थळीं कार्य करीत आहे.

छ स्थळीं ग प्रेरणा कार्य करीत आहेच आणि आतां क प्रेरणा कार्य करूं लागली. या प्रेरणा समान आहेत म्हणून यांची परिणामी प्रेरणा छ झ कर्ण रेषेंत कार्य करील. ही परिणामी प्रेरणा छ ठिकाणीं कार्य न करितां झ स्थळीं कार्य करीत आहे, असें समजूं. त्या ठिकाणीं तिच्या जागीं तिच्या घटक प्रेरणा क, ग ठेविल्या तर क प्रेरणा ज झ दिशेनें आणि ग प्रेरणा त झ दिशेनें कार्य करितील. पूर्वी झ स्थळींत झ दिशेनें कार्य करणारी ख प्रेरणा होती व आतां ग आली, यास्तव झ स्थळीं क आणि ग, ख या प्रेरणा कार्य करीत आहेत. या तीनही प्रेरणा पूर्वी अ स्थळीं कार्य करीत होत्या व त्याच आतां झ स्थळीं कार्य करीत आहेत. झ हा बिंदु अ झ या अ च झ ज या समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांतील आहे. यास्तव क आणि ख, ग या प्रेरणा अ झ दिशेनें कार्य करीत असल्या पाहिजेत; म्हणजे त्यांची परिणामी प्रेरणा कर्णरेषेंत कार्य करिते असें झालें. ख + ग = २क. म्हणून जर क, २क या प्रेरणा असतील तर त्यांवरील समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवितो.

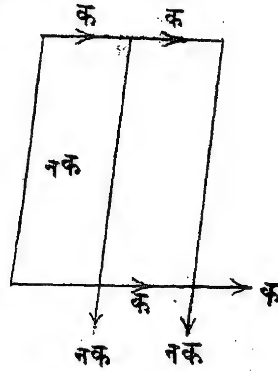


(२) यात प्रमाणें क आणि २क या प्रेरणा असतील, तरी बाजूच्या आकृ

ति वरून सिद्धांत सिद्ध होतो.

तसेंच क आणि ४क किंवा क आणि नक या प्रेरणा असतील तरी सिद्धांत खरा आहे. मात्र न पूर्ण संख्या असली पाहिजे.

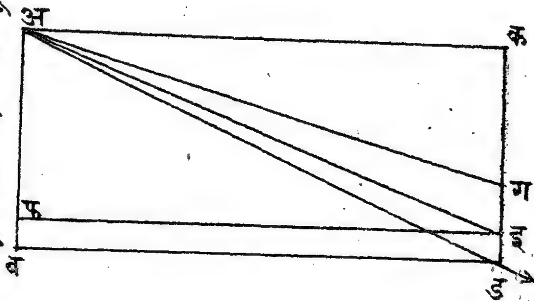
(४) आतां ज्यापेक्षां नक आणि क प्रेरणा असतां सिद्धांत खरा आहे त्यापेक्षां नक आणि २क प्रेरणा असल्यासही खरा आहे हें पुढील आकृतिवरून स्पष्ट होईल.



तसेंच नक आणि ३क किंवा नक आणि मक प्रेरणा असतांही सिद्धांत खरा आहे. या स्थळींही म पूर्ण संख्या असली पाहिजे.

यावरून ज्या दोन प्रेरणांस एक साधारण गुणक आहे. अशा प्रेरणा असल्यास त्या प्रेरणा दर्शविणाऱ्या रेषांवरील समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवितो.

(२२) आतां जेव्हां प्रेरणा अशा नसतील तेव्हांही सिद्धांत खरा असतो हें सिद्ध करूं.



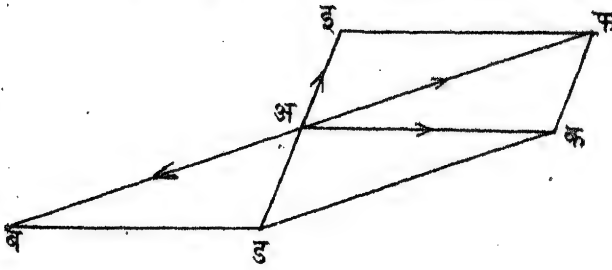
अब, अक या दोन रेषा अशा प्रेरणा दर्शविणाऱ्या आहेत. यांवर अब-

ड क समांतर भुज चौकोन काढ. आतां जर याचा अ ड कर्ण त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवीत नसेल, तर अ ग रेषा ती दिशा दर्शविते, असें घेऊं. प्रत्येक भाग ग ड हून लहान असे अ क चे समान भाग पाड. तेवढालेच क ड चे विभाग पाड. शेवटला विभाग ग,ड या बिंदूंच्या मध्यें येईल. शेवटला भाग इ स्थळीं आला असें समजूं. इ बिंदूतून इ फ, अ क शीं समांतर काढ. तर अ क आणि अ फ या दोन रेषा अशा प्रेरणा दर्शवितात कीं, ज्यांचे विवक्षित भाग एवढे किंवा ज्यांस साधारण गुणक आहे असे पूर्ण भाग पाडितां येतात. या करितां वर सिद्ध केल्या प्रमाणें त्यांवरील समांतर भुज चौकोनाचा कर्ण अ इ या रेषेंत त्यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करील. अ क, अ फ यांच्या जागीं त्यांची अ इ रेषेंत कार्य करणारी परिणामी प्रेरणा घेऊं. मूळच्या अ ब, अ क प्रेरणांपैकीं अ फ, अ क यांची परिणामी प्रेरणा अ इ आहे. तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा काढण्यास अ इ आणि फ ब यांची परिणामी प्रेरणा काढिली पाहिजे. फ ब प्रेरणा फ पासून अ बिंदुस्थळीं ने. तेव्हां अ ई आणि फ ब यांची परिणामी प्रेरणा या दोहों प्रेरणांच्या मधून गेली पाहिजे, हें उघड आहे. परंतु अ ग ही अ क, अ ब यांची परिणामी प्रेरणा आहे असें कल्पिलें आहे. ही तर या दोहोंच्या बाहेर आहे. यांच्या बाहेर परिणामी प्रेरणा असणें अशक्य आहे. या करितां अ ग रेषेंत त्यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करणार नाहीं. या प्रमाणें अ ड शिवाय

दोहों प्रेरणांच्या मध्यें दुसरी कोणतीही रेषा घेतली, तरी तीनं प- रिणामी प्रेरणा कार्य करीत नाहीं असें सिद्ध करितां येईल. यास्त- व त्यांची परिणामी प्रेरणा अ ड कर्ण रेषेंतच कार्य करिते.

(२३) कर्ण परिणामी प्रेरणेचें परिमाणही दर्शवितो हें सि- द्ध करूं.

अ ब, अ क या रेषा अ स्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रे- रणा दर्शवितात. अ ब ड क हा समांतर भुज कोन काढ. अ ड सांध. तर अ ब, अ क यां- ची परिणा- मी प्रेरणा



अ ड रेषेंत कार्य करील. अ ड वाढवून अ ब, अ क यांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिणाम दर्शविण्याजोगी अ ई घे. तेव्हां अ ब, अ क, अ ई या रेषा परस्पर समतोल असणाऱ्या प्रेरणा दर्शवितात. यास्तव यांपैकीं कोणती तरी एक दुसऱ्या दोहोंच्या परिणामी प्रेरणेच्या बरोबरीची व उलट दिशेनें कार्य क- रणारी असेल. म्हणून अ ब, अ क आणि अ ई यांच्या प- रिणामी प्रेरणेच्या बरोबरीची परंतु उलट दिशेनें कार्य करणा- री आहे. अ ई फ क हा समांतरभुज चौकोन पुरा करून अ- फ कर्ण काढ. म्हणजे अ ई आणि अ क यांची परिणामी

प्रेरणा अफ दिशेनें कार्य करील, म्हणून अब आणि अफ एका रेषेंत असल्या पाहिजेत.

या करितां बफ रेषा कड्शीं समांतर आहे, आणि कफ, डईशीं समांतर आहे, म्हणून अडकफ हा समांतर भुज चौकोन आहे.

अड = कफ.
कफ = अइ.
अड = अई.

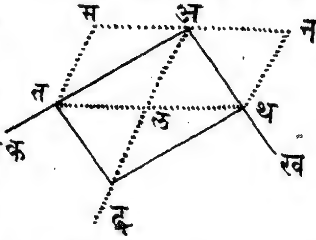
परंतु अइ रेषा अब, अक यांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण दर्शविणारी रेषा घेतली होती. म्हणून अड कर्ण परिणामी प्रेरणेचें परिमाणही दर्शवितो. पूर्वी कर्ण तिची कार्यदर्शक रेषा दर्शवितो हें सिद्ध केलें आहे. यास्तव एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा दर्शविणाऱ्या रेषांवर समांतर भुज चौकोन काढिला, तर त्याचा त्या बिंदूंतून जाणारा कर्ण त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा व तिचें परिणाम दर्शवितो, हें सिद्ध झालें.

(२४) दोन प्रेरणा समान असतां त्यांच्या कार्यदर्शक रेषांवर काढलेल्या समांतरभुज चौकोनाचा, प्रेरणा ज्या स्थळीं कार्य करितात त्या स्थळांतून काढलेला कर्ण त्यांची परिणामी प्रेरणा दर्शवितो. एवढें सिद्ध केल्यावर दुसऱ्या एका रीतीनें प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाचा सिद्धांत सिद्ध करितां येतो. ती रीति येथें सांगतों.

(१) प्रथमतः दोन प्रेरणा असमान आहेत व त्यांच्या का-

र्यदर्शक दिशांमध्यें काटकोन आहे असें घेऊं.

क, ख असमान प्रेरणा **अ** स्थळीं **अ क** व **अ ख** रेषांत कार्य करितात; त्याचीं परिमाणें दर्शविण्यास **अ त** व **अ थ** रेषा घे, आणि **अ त द थ** हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर. त्याचे **अ द** व **त थ** कर्ण काढ. ते परस्पर **ल** बिंदूत छेदितात. **अ** बिंदूतून **न अ म**, **त थ** कर्णाशीं समांतर रेषा काढ. नंतर **त, थ** बिंदूपासून **अ ल** शीं समांतर रेषा काढ. त्या **म अ न** रेषेस अनुक्रमें **म** आणि **न** स्थळीं मिळूं दे.



अ द = त थ ∴ अ ल = त ल = ल थ.

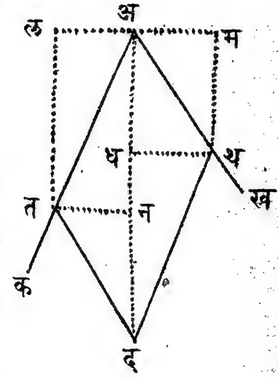
म्हणून **न ल** आणि **म ल** हे समबाजु समांतरभुज चौकोन आहेत.

म्हणून **अ ल** व **अ न** या समान प्रेरणांची **अ थ** आणि **अ म** आणि **अ ल** या समान प्रेरणांची **अ त** फलित प्रेरणा आहेत. यास्तव **अ त** व **अ थ** या प्रेरणांच्या जागीं यांच्या बरोबरीच्या **अ म, अ न** आणि २ **अ ल** घेऊं. **अ म, अ न** या परस्पर समान व उलट आहेत, म्हणून त्या नाश पावतील. यास्तव **अ त** व **अ थ** या प्रेरणा २ **अ ल** म्हणजे **अ द** प्रेरणेबरोबर झाल्या. **अ द** हा **अ त द थ**चा कर्ण आहे.

(२) दोहोंच्या कार्यदर्शक दिशांमधील कोन काटकोन

नाहीं असें घेऊं.

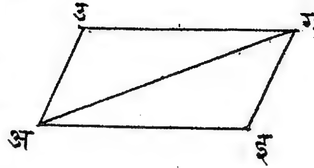
पूर्वी प्रमाणेंच अ त द थ समांतरभुज चौकोन पुराक-रून अ द कर्ण काढ. अ द वर त आणि थ पासून त न आणि थ ध लंब काढ. तसेंच त, थ पासून अ द शीं समांतर रेषा काढ. आणि अ पासून त न शीं समांतर रेषा काढ; ती त, थ पासून काढलेल्या रेषांस ल आणि म ठिकाणीं मिळते.



तन = थध = मअ = अल.

वरील सिद्धते वरून अ त व अ थ या रेषा अ ल व अ न आणि अ म व अ ध यांच्या अनुक्रमें परिणामी प्रेरणा दर्शवितात. म्हणून त्या दोहोंच्या जागीं या चार प्रेरणा घेतां येतील. यांपैकीं अ ल व अ म या परस्पर समान व उलट असल्यानें परस्पर नाश पावतील, व बाकी अ न व अ ध राहतील. परंतु अन = द ध, म्हणून अ न + अ ध = अ ध + द ध = अ द ही प्रेरणा मूळच्या अ त व अ थ याच्या जागीं आहे. म्हणजे ती त्यांची परिणामी प्रेरणा आहे.

(२७) दोहों प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा मोठ्या प्रेरणेच्या अधिक जवळ असते. अ ई आणि अ ऊ या रेषा क ख प्रेरणा दर्शवितात. यांपैकीं क प्रेरणा ख पेक्षां मोठी आहे.



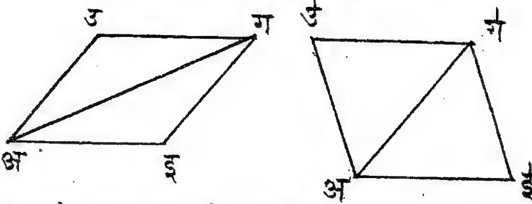
अईगउ हा समांतरभुज चौकोन पुरा करः आणि अग सांध अग रेषा क आणि ख यांची परिणामी प्रेरणा दर्शविते.

आतां जर ग अइ कोन ग अ उ कोनापेक्षां लहान असेल तर अ ग, अउ पेक्षां अ इ च्या अधिक जवळ असेल.

कारण अइ = ग उ. गउ > अइ; ∴ ∠गअउ > ∠अगउ (यु. बु. १, सिं. १८) परंतु ∠अगउ = ∠गअई ∴ ∠गअउ > ∠गअई ∴ अग, अउ च्या पेक्षां अइ च्या अधिक जवळ आहे हें सिद्ध झालें.

(२६) दोहों प्रेरणां मधील कोन जास्त मोठा असेल, तशी त्यांची परिणामी प्रेरणा लहान असते.

क आणि ख या दोन प्रेरणां मधील कोन उअई असतां जी त्यांची परिणामी प्रेरणा अ ग असेल तिजपेक्षां तोच कोन याहून मोठा म्हणजे उ अ इ असेल तर त्यांची परिणामी प्रेरणा अ ग ही लहान असेल.



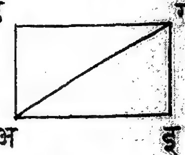
लहान कोन असतां अइ आणि अउ या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शवितात; आणि मोठा कोन असतां अई आणि अउ या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शवितात. अइगउ आणि अई गउ समांतरभुज चौकोन पुरे कर.

अइ = अई, इग = ईग आणि ∠अइग > ∠अईग ∴ अग > अग हें सिद्ध.

(२७) यावरून हें उघड आहे कीं, एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या दिशा व त्यांचीं परिमाणें माहीत असलीं कीं, आ-

पणास त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा व तिचें परिणाम केवळ भूमिती नें काढितां येतील. हें काढण्यास ज्या स्थळीं ज्या दिशेनें प्रेरणा कार्य करीत असतील, त्या बिंदूंतून त्या दिशेनें दोन रेषा काढून त्यांच्या लां बी प्रेरणांच्या परिमाणाच्या प्रमाणांत घ्याव्या. नंतर त्यांवर समांत रभुज चौकोन काढून दिलेल्या बिंदूतून कर्ण काढावा. म्हणजे तो क र्ण परिणामी प्रेरणा दिशेनें व परिमाणानें दर्शवील. यास्तव ज्याचे ळीं आम्हांस समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाची लांबी काढतां येई ल, त्यावेळीं परिणामी प्रेरणा केवळ भूमितीनें समजेल. कित्येक उ दाहरणांत मात्र हें कर्णाचें परिमाण त्रिकोणमितीच्या सहाय्याशि वाय काढितां येते.

उदाहरण १.— क, ख या प्रेरणा एका स्थळीं दोहोंमध्यें ९० चा कोन करून कार्य करीत आहेत, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा का ढ. अइ, अड या रेषा प्रेरणा दर्शविण्यास घे. अ इ ग ड हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर, म्हणजे अ ग कर्ण परिणामी प्रेरणा दर्शवितो.



ड अ ई हा कोन काटकोन आहे, म्हणून (यु· बु· १ सि· ४७)

$$अग^2 = अइ^2 + गइ^2$$

$$गइ^2 = अड^2$$

$$\therefore अग^2 = अइ^2 + अड^2$$

$$अग = \sqrt{(अइ^2 + अड^2)}$$

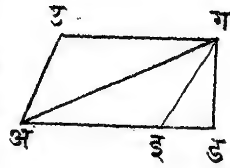
$$प^2 = क^2 + ख^2.\ प = \sqrt{(क^2 + ख^2)}$$

यास्तव दोहों प्रेरणांच्या दिशांमधील कोन काटकोन असेल तर त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेच्या वर्गमुळा बरोबर परिणामी प्रेरणा अ सते.

जर $क = ख$, तर $प = \sqrt{(२क^2)} = क\sqrt{(२)}$

उदाहरण २.— जर क, ख या दोन प्रेरणांच्या दिशांमध्यें

६०° चा कोन असेल तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ. अइ, अउ या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शवितात. त्यांवर अइगउ समानांतरभुज चौकोन काढ. अग परिणामी प्रेरणा होईल ग पासून अइ वर गड हा लंब काढ.



∠उअई=६०° ∴ ∠गइअ=१२०°, ∠गइड=६०°.

(यु॰ बु॰ २ सि॰ १२.) अग² = अइ² + गइ² + २ अइ. इड. आणि ∠उगड = ९०°, आणि ∠उगइ = ६०° ∴ ∠इगड = ३०°.

∴ इड = ½ गइ = ½ ख.

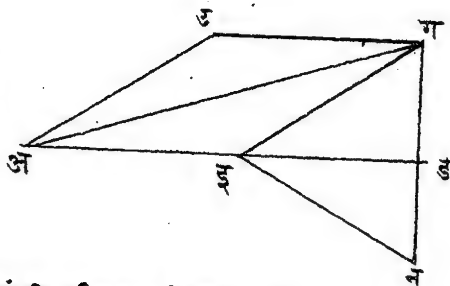
प² = क² + ख² + २ क × ½ ख = क² + ख² + कख.

∴ प = √(क² + ख² + कख.)

जर क = १५ ख = ९

तर = प = √(२२५ + ८१ + १३५) = √(४४१) = २१.

उदाहरण ३- जर क, ख प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करीत असतील व त्याच्या दिशांमधील कोन ३०° असेल, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ?



अइ, अउ या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शविण्यास घे, व त्यांवर अइगउ समांतरभुज चौकोन काढ. व त्याचा कर्ण अग काढ.

तर अग कर्ण अइ, अउ यांची परिणामी प्रेरणा आहे.

अइ वाढवून तिजवर गड लंब काढ. इ पासून इन रेषा अशी काढ कीं, इड शीं गइड एवढा कोन करील. व गड स न स्थळीं मिळेल.

∠उअई = ∠गइड = ∠डइन = ३०° ∴ ∠इगड = ६०°

$\therefore \angle$ इगड $= \angle$ गइन $= \angle$ इनग $=$ ६०°.

गइन हा समभुज त्रिकोण झाला. ∴ गइ = इन = गन = ख.

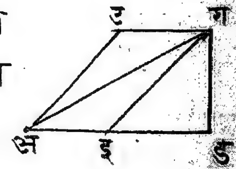
यास्तव इडे = गई — गडे = खे — $(\frac{ख}{२})^२$ = ¾ खे ∴ इड = $\frac{ख}{२}\sqrt{३}$

(यु. बु २ सि. १२) अगे = अई + ईगे + २ अई. ईड

पे = के + खे + २क. $\frac{ख}{२}\sqrt{३}$ = के + खे + करव $\sqrt{३}$.

∴ प = $\sqrt{}$(के + खे + करव $\sqrt{३}$.)

उदाहरण ४ - जर **क, ख** या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करीत असतील, आणि त्यां मधील कोन ४५° असेल. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.



अइ, अउ या रेषा **क, ख** प्रेरणा दर्शविण्यास घे, व त्यांवर समांतरभुज चौकोनव त्याचा कर्ण काढ.

अगे = अइे + गइे + २अइ. इड

$\angle$गइड = ४५°.

∴ $\angle$इगड = ४५°.

∵ गड = इड, ∴ २इडे = गइे.

∴ इडे = $\frac{१}{२}$ गइे = $\frac{१}{२}$ अउे

इड = $\frac{अउ}{\sqrt{२}}$ = $\frac{अउ\sqrt{२}}{२}$ × $\frac{अउ\sqrt{२}}{२}$

अगे = अइे + अउे + २ अइ. इड.

पे = के + खे + २क × $\frac{१}{२}$ ख $\sqrt{२}$.

= के + खे + करव $\sqrt{२}$.

∴ प = $\sqrt{}$(के + खे + करव $\sqrt{२}$.

उदाहरण ५ — याच प्रमाणें दोहों प्रेरणां मधील कोन १२०°, १३५°; आणि १५०° असतील तेव्हां त्याच्या परिणामी प्रेरणा काढ.

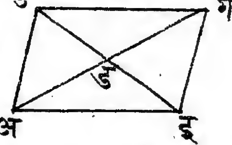
वर प्रमाणें आकृति काढून कृती केल्यास परिणामी प्रेरणांच्या चारण्या अशा येतील.

कोन १२०° असतां, $प = \sqrt{(के + खे - कख)}$.

कोन १३५° असतां, $प = \sqrt{(के + खे - कख\sqrt{२})}$.

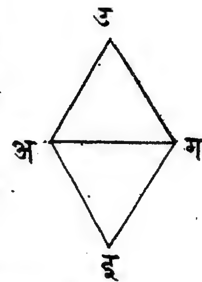
कोन १५०° असतां, $प = \sqrt{(के + खे - कख\sqrt{३})}$.

(२८) चौरस व ऱ्हांबस यांचे कर्ण त्यांच्या कोनास दुभागतात. यांच्या चारी बाजू सारख्या असतात. यास्तव दोन समान प्रेरणा असतील तर त्यांची परिणामी प्रेरणा त्यां मधील कोनास नेहमी दुभागील. तसेंच कोणत्याही समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्पर दुभागतात. या करितां एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा दर्शविणाऱ्या **अइ** व **अउ** रेषा असतील तर, त्यांचीं उ इ टोकें सांधून उइ रेषा ड स्थळीं दुभागिली आणि जर **अ,ड** बिंदु सांधिले, तर **अड** त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शवील, आणि **अड** च्या दुप्पट **२अड** तिचें परिमाण असेल. कारण २ **अड** = **अग**. या रीतीनें परिणामी प्रेरणा काढणें कित्येक वेळां फार उपयोगी पडतें.



उदाहरण ६.— जर दोन समान प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करितील; आणि त्यांच्या दिशांमधील कोन १२०° असेल, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा एका प्रेरणेबरोबर होईल हें दाखीव.

अइ, अउ या दोन रेषा समान प्रेरणा दर्शविणाऱ्या आहेत, व **उअइ** हा कोन १२०° चा आहे. **अइगउ** हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर आणि **अग** कर्ण काढ.



अइ व **अउ** समान आहेत. म्हणून **अग** कर्ण **उअइ** कोनास दुभागितो.

$$\angle उअग = \angle गअइ = \angle अगइ = ६०°$$

$$\angle अउग = ६०°.$$

म्हणून **अगउ**, हा समभुज त्रिकोण झाला.

∴ अग = अउ = अइ.

ग अ वाढवून अग = अड घेतली, तर अड, अइ आणि अड यांस समतोल धरील. ∠उअड = ∠डअइ = १२०°.

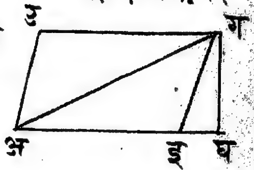
टीप – यास्तव तीन समान प्रेरणा परस्परांशीं १२०° कोन करण्याजोग्या दिशांनीं एका स्थळीं कार्य करतील तर त्या समतोल असतील.

टीप – तसेंच जर तीन प्रेरणा एका स्थळीं कार्य करीत असून जर समतोल असतील तर तिसरी प्रेरणा २ऱ्या दोहोंशीं सारखे कोन करील.

(२२) दोहों प्रेरणांचीं परिमाणें माहीत असून त्यां मधील कोन माहीत असला, तर परिणामी प्रेरणेचें परिमाण काढण्याची सर्व साधारण सारणी सांगतों. यास मात्र थोडेसें त्रिकोण मितीचें ज्ञान लागेल.

अइ, अउ या रेषा क, ख या प्रेरणा दर्शवितात. त्यां मधील कोन उअई θ अक्षर दर्शविलें.

अइ गउ हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर, आणि अग सांध. तर अग रेषा त्यांची परिणामी प्रेरणा दर्शविते. ग पासून अइ वर गघ लंब काढ.



$\text{अग}^2 = \text{अइ}^2 + \text{गइ}^2 + २\,\text{अइ}\cdot\text{घइ}$. (यु. बु. १ सि. १२)

$\text{गइ} = \text{अउ}$; $\angle \text{उअइ} = \angle \text{गइघ} = \theta$.

$\frac{\text{घइ}}{\text{गइ}} = \frac{\text{घइ}}{\text{अउ}} = \text{कोभु}.\theta$ ∴ $\text{घइ} = \text{अउ}\cdot\text{कोभु}\,\theta$.

∴ $\text{पे}^2 = \text{के}^2 + \text{खे}^2 + २\,\text{क} \times \text{ख}.\ \text{कोभु}\cdot\theta$.

परिणामी प्रेरणा काढण्याची ही सर्व साधारण सारणी आहे. यावरून मागील विशेष प्रकार कसे निघतात ते पहा.

(१) जर $\angle\theta = ९०°$, $\text{कोभु}\ ९०° = ०$, ∴ $\text{पे}^2 = \text{के}^2 + \text{खे}^2$.

(२) जर $\angle\theta = १२०°$, $\text{को भु}\ १२०° = -\frac{१}{२}$ ∴ $\text{पे}^2 = \text{के}^2 + \text{खे}^2 - \text{क}\,\text{ख}$.

(३) जर ∠ऋ = १३५°, को·भु·१३५° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ प^2 = क^2 + ख^2 − कख√२.

(४) जर ∠ऋ = १५०°, को·भु·१५०° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ प^2 = क^2 + ख^2 − कख√३

(५) जर ∠ऋ = ६०°, को·भु·६०° = $\frac{1}{2}$, ∴ प^2 = क^2 + ख^2 + कख.

(६) जर ∠ऋ = ४५°, को·भु·४५° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ∴ प^2 = क^2 + ख^2 + कख√२.

(७) जर ∠ऋ = ३०°, को·भु·३०° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ∴ प^2 = क^2 + ख^2 + कख√३

(८) जर क = ख; तर प^2 = क^2 + क^2 + २क^2. को·भु·(ऋ) = २क^2(को·भु ऋ+१)

(९) जर क = ख, आणि ∠ऋ = १२०°, तर को·भु·१२०° = $-\frac{1}{2}$.

∴ प^2 = क^2 + क^2 + २क^2 × $-\frac{1}{2}$ = क^2 ∴ प = क.

वरील सारणीवरून परिणामी प्रेरणेचें परिमाण समजतें. तिची दिशा समजण्यास ∠गअइ कोन समजला पाहिजे.

∠गअइ = ४ असें कल्पून तर.

∠उअग = ∠अगइ = ऋ − ४.

म्हणून $\frac{अइ}{गइ} = \frac{अई}{अउ} = \frac{भु(अगई)}{भु(गअइ)} = \frac{भु(उअग)}{भु(गअइ)}$

$\frac{क}{ख} = \frac{भु(ऋ-४)}{भु(४)}$

∴ क भु(४) = ख·भु(ऋ) को·भु(४) − ख·को भु(ऋ)·भु(४) ∴ भु(४) (क+ख को·भु·(ऋ)) = ख भु(ऋ) को भु(४)

स्पर्शरे·(४) = $\frac{ख·भु·ऋ}{क+ख\ को\ भु\ ऋ}$.

उदाहरणें.

(१) १२ शेर व ३५ शेर अशा दोन प्रेरणा परस्परांशीं काटकोन करण्या जोग्या दिशांनीं एका बिंदूवर कार्य करीत आहेत.तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.

उ. ३७ शेर

(२) एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या दिशा परस्परां-

शीं काटकोन करितात व त्या २ : ४५ या प्रमाणांत आहेत. त्यांची परिणामी प्रेरणा ८१ शेरांची आहे तर प्रेरणा काढ.

उ. ६ शेर. ३४५ शेर.

(३) दोन प्रेरणा एका कणावर कार्य करीत आहेत. त्यांच्या महत्तम आणि लघुत्तम परिणामी प्रेरणा १७ आणि ३ शेरांच्या आहेत. तर प्रेरणांची परिमाणें व दिशा काय असाव्या तें सांग?

उ. ७ शेर व १० शेर एका रेषेंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा.

(४) दोन प्रेरणा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करीत असतात. तेव्हां त्यांची फलित प्रेरणा २८ शेरांची असते; आणि त्याच परस्परांशीं काटकोन करणाऱ्या दिशांनीं कार्य करीत असल्या तर त्यांची फलितप्रेरणा ५२ शेर असते. तर प्रेरणा काढ.

उ. ४८ शेर, २० शेर.

(५) एक प्रेरणा दुसरीच्या तिप्पट आहे, अशा दोन प्रेरणा एका कणावर कार्य करीत आहेत. त्या अशा आहेत कीं, थोरली ९ शेरांनी वाढविली आणि धाकटी दुप्पट केली, तरी फलित प्रेरणेची दिशा बदलत नाहीं. तर प्रेरणा काय आहेत.

उ. ९ शेर व ३ शेर.

(६) असें दाखीव कीं, जर दोहीं प्रेरणा मधील कोन वाढविला तर फलित प्रेरणा कमी होते.

(७) परस्परांशीं काटकोन करणाऱ्या दिशांनीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा ५१ शेरांची आहे व एक प्रेरणा २४ शेरांची आहे, तर दुसरी प्रेरणा काढ.

उ. ४५ शेर.

(८) असें दाखीव कीं जर दोहों प्रेरणांची फलित प्रेरणा एका प्रेरणेच्या दिशेशीं काटकोन करणाऱ्या दिशेनें कार्य करीत असेल, तर फलित प्रेरणा दुसऱ्या प्रेरणेहून लहान असते.

8715

(९) ३६ शेर आणि ६० शेर जोराच्या दोन प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करितात, व त्यांच्या दिशांमध्यें ६०° चा कोन होतो. तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ. ८४ शेर.

(१०) प्रत्येक १०० शेरांची अशा दोन प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करितात व त्या दोहों मधील कोन ६०° चा आहे, तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ. १७३. २ शेर.

(११) प्रत्येक १० शेरांची अशा दोन प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करितात. आणि त्या दोहों मध्यें ४५° चा कोन आहे. तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ. १८. ४७७ शेर.

(१२) प्रत्येक ३० शेरांची अशा दोन प्रेरणा ३०° चा कोन करून एका बिंदूवर कार्य करितात. तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ. ७५.९५५

(१३ प्रत्येक १०० शेरांची अशा दोन प्रेरणा १५०° चा कोन करून एका बिंदूवर कार्य करितात. तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ. ५१.७६३८ शेर.

(१४) ६० शेर व १६० शेर या दोन प्रेरणा १००° चा कोन करून एका बिंदूवर कार्य करितात. तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ. १४० शेर.

(१५) २४ शेर आणि १४३ शेर, ३५ शेर व १६ शेर, आणि ७० व ४०० शेर अशा प्रेरणा ह्यांच्या फलित प्रेरणा अनुक्रमें १४५, १८५ आणि ३७० शेरांच्या आहेत. त्यांच्या मधील कोन अनुक्रमें ९०°, ६०° आणि १२०° चे आहेत हें दाखीव.

(१६) एका कणावर दोन प्रेरणा कार्य करीत आहेत. त्यांपैकीं एक

५ शेरांची आहे. आणि त्यांची फलित मेरणाही ५ शेरांची आहे. वतिची कार्यदर्शक रेषा वरील ५ शेरांच्या मेरणेच्या दिशेशीं काटकोन करिते. तर दुसऱ्या मेरणेचें परिमाण व दिशा काढ.

उ. ५√२ शेर, दुसऱ्या मेरणेच्या दिशेशीं १३५°, चा कोन करिते.

(१७) प आणि २प या दोन मेरणा एकमेकांस किती कलत्या असाव्या म्हणजे त्यांची फलित मेरणा एकीशीं काटकोन करील.

उ. १२०

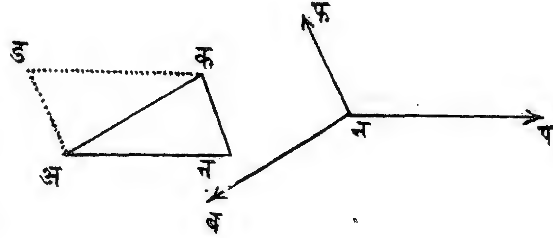
(१८) ३, ६, ९ शेरांच्या ३ मेरणा एका कणावर कार्य करून त्यास समतोल ठेवितात. तर असें दाखवा कीं, त्या एका रेषेंत कार्य करितात.

प्रकरण ३.

एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणा.

(३०) प्रेरणा त्रिकोण— त्रिकोणाच्या तीन बाजू क्रमानें जर एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणांची परिमाणें व कार्य मार्ग दर्शवितील तर त्या प्रेरणा समतोल असतील.

अबक एक त्रिकोण आहे. याच्या तीन बाजू अब, बक आणि क,अ, एका न बिंदूवर नप, नफ, नब दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प,फ,ब या तीन प्रेरणांची परिमाणें व कार्य मार्ग दर्शवितील; तर त्या प्रेरणा या तीन बाजूंच्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांच्या दिशा या बाजूंशीं



समांतर असतील तर प,फ,ब समतोल असतील.

अ तून अड बकशीं आणि क तून कड अबशीं समांतर काढ.

आतां अब आणि अड रेषा ज्या प्रेरणा दर्शवितील त्यांची परिणामी प्रेरणा अक रेषा परिमाणानें व दिशेनें दर्शवील. अड, बकशीं समांतर व बरोबर आहे, म्हणून जी प्रेरणा बकनें दर्शविली जाईल, ती प्रेरणा अड रेषेनें ही दर्शविली जाईल. म्हणून प,फ या प्रेरणा अब अड रेषा दर्शवितात. म्हणून प,फ यांची परिणामी प्रेरणा अक आहे. ब प्रेरणा क अ रेषा दर्शविते म्हणून,

प,फ,ब या तीन प्रेरणा अक आणि कअ या प्रेरणां बरोबर आहेत. परंतु अक, कअ या समान व विरुद्ध असल्यानें समतोल असतील; म्हणून प,फ,ब याही प्रेरणा समतोल असतील.

या सिद्धांतास **प्रेरणा त्रिकोण** असें नांव देतात. याच्या प्रतिज्ञेंत जें सांगितलें तें विद्यार्थ्यांनीं चांगलें लक्षांत आणिलें पाहिजे. बाजू क्रमानें घेणें, म्हणजे एक बिंदु आकृतीच्या सभोंवार उलट किंवा सूलट फिरविला असतां ज्या क्रमानें बाजू येतील तशा घेणें होय. म्हणजे जर अब रेषा एक प्रेरणा दर्शवील तर दुसऱ्या प्रेरणा दर्शविण्यास बक, कअ रेषाच घेतल्या पाहिजेत. बक अक घेतां येणार नाहींत. किंवा कब, कअ अगर कब, अक याही घेतां येणार नाहींत. तसेंच या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करीत आहेत, म्हणून अब, बक आणि कअ याच रेषा वस्तुतः प्रेरणा दर्शवीत नसून, एका बिंदूपासून याशीं समांतर आणि ज्या दिशेस कार्य करीत आहेत त्या दिशेस काढलेल्या समांतर रेषा प्रेरणा दर्शवितात. परंतु हें बरोबर न समजल्यामुळें अब, बक आणि कअ याच रेषांनीं परिमाणानें व स्थानानें दर्शविलेल्या प्रेरणा समतोल आहेत असें समजतात, तशी गोष्ट नाहीं हें पक्कें लक्षांत ठेवावें; आणि प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या आहेत हेंही लक्षांत ठेवावें. याकडे लक्ष पोंचविण्यास्तव दिशा या शब्दाचा उपयोग न करितां कार्यमार्ग याचा उपयोग प्रतिज्ञेंत केला आहे.

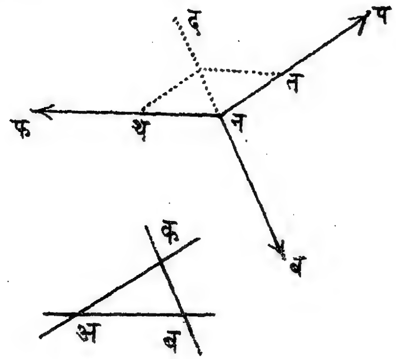
या सिद्धांतावरून एक गोष्ट उघड आहे कीं जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू क्रमानें दोन प्रेरणांचीं परिमाणें व कार्य मार्ग दर्शवितील, तर त्यांची तिसरी बाजू उलट क्रमानें घेतल्यास ती त्यांची परिणामी प्रेरणा परिमाणानें व कार्यमार्गानें दर्शवील.

(२१) जर तीन प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करीत असून समतोल असतील, आणि जर यांच्या कार्यमार्ग दर्शविणाऱ्या

रेषांशीं समांतर ज्यांच्या बाजू आहेत असा एक त्रिकोण काढिला, तर त्याच्या बाजू ज्यांशीं समांतर आहेत त्या प्रेरणांशीं प्रमाणांत असतील.

प,फ,ब या तीन प्रेरणा **न** बिंदुस्थळीं कार्य करीत असून समतोल आहेत.

प,फ प्रेरणांच्या कार्यदर्शक रेषांत **त** आणि **थ** असे बिंदु घ्या कीं; **नत** व **नथ** रेषा **प** व **फ** यांच्या प्रमाणांत असतील. $\frac{नत}{नथ} = \frac{प}{फ}$. आतां **नत** आणि **नथ** यांवर समांतरभुज चौकोन **नतदथ** काढ. आणि **नद** सांधतर **नद** रेषा **प** आणि **फ** यांची परिणामी प्रेरणा दर्शवील, म्हणून **प,फ** यांच्या जागीं **नद** प्रेरणा ठेवितां येईल. परंतु **प,फ** प्रेरणास **ब** प्रेरणा समतोल ठेविते. म्हणून **नब** आणि **नद** एका रेषेंत असतील. आणि **नद** रेषा **ब** प्रेरणा दर्शवील. **नथ = तद**, याकरितां **नतद** त्रिकोणाच्या **नत, तद** आणि **दन** या बाजू **प,फ,ब** या प्रेरणांच्या प्रमाणांत आहेत.



आतां **अबक** हा एक त्रिकोण असा काढ कीं, त्याच्या तीनही बाजू **नतद** त्रिकोणाच्या बाजूंशीं समांतर असतील तर **अबक** आणि **नतद** हे दोनही त्रिकोण सरूप असतील.

∴ (यु· बु· ६ सि·) नत: तद : : बक : कअ.

आणि प: फ: : बक: कअ·

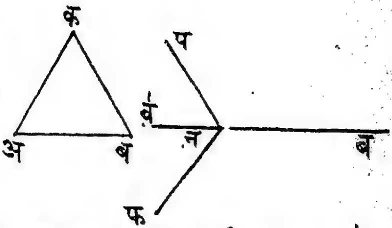
तन: नद : : कब : बअ.

फ: ब : : कब: बअ.

∴ प: ब : : बक : बअ.

∴ प: फ: ब : : बक: कअ: बअ.

टीप– जर प, फ या दोन प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा बे असेल आणि जर ज्याच्या बाजू प, फ, बे या प्रेरणांशीं समांतर आहेत असा एक त्रिकोण काढिला तर त्याच्या बाजूही या प्रेरणांशीं प्रमाणांत असतील. कारण समजा कीं ब ही प्रेरणा प, फ प्रेरणांस समतोल ठेविते, तर ब प्रेरणा बे प्रेरणेशीं समान व उलट असली पाहिजे. म्हणून अ ब क त्रिकोणाच्या बाजू प, फ, ब या प्रेरणांशीं वरील सिद्धांता प्रमाणें प्रमाणांत आहेत.



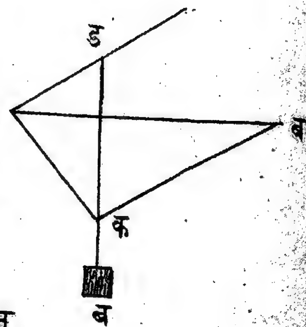
∴ अक: कब: ब अ: : प: फ: : व. परंतु ब = बे

अक: कब: ब अ: : प: फ: बे

(३२) कांहीं उदाहरणें देतों त्यांवरून प्रेरणा त्रिकोणाचा कसा उपयोग होतो हें लक्षांत येईल.

(१) व वजन **क अ** आणि **क ब** या दोन विवक्षित लांबीच्या दोऱ्यांस टांगिलें आहे व त्यांचीं शेवटें क्षितिज पातळीशीं समांतर रेषेंत **अ ब** ठिकाणीं अडकविलीं आहेत. तर जेव्हां दोऱ्या परस्पर काटकोन करितील, तेव्हां प्रत्येकीवर वजनाचा किती ताण पडेल तें सांग.

क अ, क ब यांच्या लांब्या थ व घ अक्षरें दर्शवितात असें घेऊं. तर **अ क ब** काटकोन आहे. म्हणून **अबे** = थे + घे.



क बिंदु तीन प्रेरणांच्या कार्यानें स्थिर आहे. व वजन **क व** या लंब रेषेंत त्यास खालीं ओढीत आहे. आणि **क अ, क ब** या दोऱ्या दोहों बाजूंस ताणीत आहेत.

अ पासून अड, बकशीं समांतर काढ, आणि बक तिला ड स्थळीं मिळेपर्यंत वाढीव. आतां अकड त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू क अ व कब यांचे ताण आणि ब वजन यातीन प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत. म्हणून त्या बाजू या प्रेरणांशीं प्रमाणांत आहेत.

∴ अक : कड : : अकचें ताण : ब.

परंतु अकड आणि अकब हे त्रिकोण समरूप आहेत. कारण ∠अकब = ∠डअक, ∠अडक = ∠डकब = ∠कअब, आणि ∠अकड = ∠अबक.

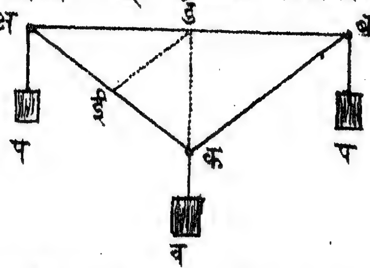
∴ अक : कड : : कब : अब.

∴ कब : अब : : अकचें ताण : ब.

कब = घ आणि अक = ७ ∴ अब = $\sqrt{(७^2 + घ^2)}$

∴ अकचें ताण = $\frac{ब\ घ}{\sqrt{(७^2 + घ^2)}}$, तसेंच, बकचें ताण = $\frac{ब \times ७}{\sqrt{(७^2 + घ^2)}}$

उदाहरण २ — क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा रेषेंत असणाऱ्या अब या दोन कप्प्यांवरून जाणाऱ्या आणि प्रत्येक टोंकास प प हीं समान वजनें असणाऱ्या दोऱ्या क ठिकाणीं गांठावल्या आहेत व त्या ठिकाणीं ब वजन टांगिलें आहे. तर अब पासून दिलेल्या अंतरावर क स्थीर राहण्यास ब वजन किती असलें पाहिजे.



कब वाढीव आणि तिला ड स्थळीं अबशीं मिळूं दे. ड बिंदूतून डइ, बकशीं समांतर काढ.

ज्यापेक्षां प, प सारखीं वजनें आहेत, त्यापेक्षां अक, बक यांचें ताण सारखे आहेत. म्हणून बकड रेषा अ आणि ब यांपासून समान अंतरावर असेल! कारण तिला अकडे किंवा बकडे अधिक जवळ जाण्यास कारण नाहीं. म्हणून अब रेषा ड स्थळीं दुभागिली जा-

ईल आणि त्यांतून काढलेली डई समांतर रेषा अकस दुभागील. अब = २थ आणि कड = घ घे. कडई त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू अकचा ताण बकचा ताण आणि व वजन या तीन प्रेरणांशीं समांतर आहेत. म्हणून प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांता प्रमाणें.

व: अकचा ताण: : कड: कई.

$\therefore$ व. प: : घ : $\frac{1}{2}\sqrt{(थ^2+घ^2)}$.

$\therefore$ व $= \dfrac{पघ}{\frac{1}{2}\sqrt{(थ^2+घ^2)}} = \dfrac{२पघ}{\sqrt{(थ^2+घ^2)}}$.

(३३) एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणा जर समतोल असतील, तर प्रत्येक प्रेरणा दुसऱ्या दोन प्रेरणा मधील कोनाच्या भुजिज्येशीं प्रमाणांत असेल.

जर प, फ, ब या प्रेरणा न स्थळीं कार्य करीत असून समतोल असतील, तर कलम ३१ यांत सिद्ध केल्या प्रमाणें. (क. ३१ यांतील आकृति पहा.)

प: फ: ब: : नत: तद: नद:

त्रिकोणमितीनें असें सिद्ध केलें आहे कीं;

नत: तद: नद: : भु. (तदन) : भु. (दनत) : भु. (नतद)

: : भु. (फनब) : भु. (पनब) : भु. (पनफ).

$\therefore$ प: फ: ब: : भु. (फनब) : भु. (पनब) : भु. (पनफ).

: : भु (फब) : भु. (पब) : भु (पफ)

किंवा $\dfrac{प.}{भु (फब.)} = \dfrac{फ.}{भु. (पब.)} = \dfrac{ब.}{भु (पफ.)}$

जर तिहीं प्रेरणांपैकीं एक प्रेरणा उलट दिशेनें कार्य करील, म्हणजे ती दुसऱ्या दोहोंची परिणामी प्रेरणा असेल. तरीं हें प्रमाण असेंच असतें. कारण जर बप्रेरणा नब दिशेनें कार्य न करितां त्याच्या उलट नद दिशेनें कार्य करील व ती बे असेल तर.

प: फ: बे: : भु. (फब) : भु. (पब) : भु: (पफ) ; कारण भु. (फबे) =

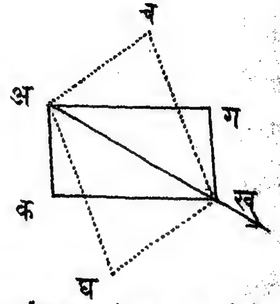
भु·(फब), आणि भु·(पबे)=भु·(पब). अशा वेळीं प्रेरणा समतोल नसतात. प,फ यांची परिणामी प्रेरणा बे आहे म्हणून प,फ,बे यांची परिणामीप्रेरणा २ बे होईल. म्हणून वरील सिद्धांताच्या केवळ उलट सिद्धांत खरा नाहीं. परंतु प्रत्येक प्रेरणा दुसऱ्या दोन प्रेरणांच्या दिशांच्या बाहेर आहे असें प्रतिज्ञेंत जास्त घातल्यानें विपर्यस्त सिद्धांत खरा होईल. नाहीं तर प्रेरणा समतोल असतील, किंवा त्यांची परिणामी प्रेरणा एकीच्या दुप्पट असेल.

(३४) जर तीन प्रेरणा एका पातळींत दृढ पदार्थावर कार्य करून त्यास स्थिर ठेवीत असतील, तर त्यांच्या कार्य दर्शक प्रेरणा एका बिंदूंत मिळतील, किंवा त्या तीनही समांतर असतील.

जर दोन प्रेरणा परस्पर समांतर असतील तर त्यांची परिणामी प्रेरणा समांतर असते व तिला समतोल ठेवणारी विरुद्ध दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा त्याशीं समांतर असेल, हें पुढें सिद्ध केलें आहे. (क·) जर दोन प्रेरणा एका बिंदूंत मिळतील, तर त्यांच्या जागीं त्यांची परिणामी प्रेरणा ठेवितां येईल. इला तिसऱ्या प्रेरणेनें समतोल धरिलें पाहिजे. असें होण्यास तिची कार्य दर्शक रेषा दोन प्रेरणा ज्या बिंदूंत मिळतील त्या बिंदूंतूनच गेली पाहिजे.

(३७) ज्या प्रमाणें दोन प्रेरणांच्या जागीं त्यांची परिणामी प्रेरणा ठेविली, तरी कार्य तेवढेंच होतें. त्याच प्रमाणें कोणत्याही एका प्रेरणेच्या जागीं तिच्या एवढेंच कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणा ठेविल्या तरी तेवढेंच कार्य होईल. जशा दोन प्रेरणांची एक परिणामी प्रेरणा काढितां येते, त्या प्रमाणें एका प्रेरणेच्या बरोबरीचें कार्य करणाऱ्या दोन किंवा अधिक प्रेरणा काढितां येतात. म्हणजे एका प्रेरणेचें तिच्या घटक प्रेरणेंत पृथक्करण करितां येते. यास प्रेरणापृथक्करण म्हणतात.

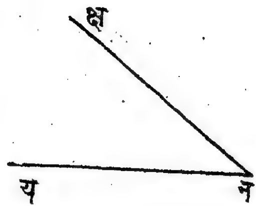
समजा कीं, **अ ख** रेषा एक प्रेरणा दर्शविते. ज्याचाकर्ण **अ ख** होईल असा एक **अ क ख ग** समांतरभुज चौकोन काढ. तर मा-

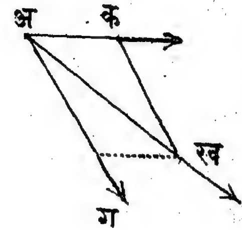


गील सिद्धांता प्रमाणें अक आणि अग या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अख रेषा दर्शवील. यास्तव अख प्रेरणेच्या बरोबरीच्या अक, अग या दोन प्रेरणा निघाल्या.

या प्रमाणें ज्याचा कर्ण अख आहे असें अघखच. अछखज असे अनेक समांतरभुज चौकोन काढितां येतील. म्हणून अखच्या बरोबरीचीं अनेक प्रेरणाद्वयें मिळतील. बरें यांपैकीं एकेका प्रेरणा द्वयाच्या प्रत्येक प्रेरणेबरोबर आणखी दोन प्रेरणा काढितां येतील. त्यांच्या बरोबर आणखी प्रेरणा द्वयें निघतील. सारांश एका प्रेरणेबरोबर असंख्य प्रेरणा काढितां येतील. आणि त्या सर्वांचे मिळून कार्य मूळच्या प्रेरणेबरोबर होईल.

(३६) परंतु जर घटक प्रेरणांनीं दिलेल्या प्रेरणेशीं अमके कोन करावे, म्हणजे त्यांनीं अमक्या दिशांनीं कार्य करावें असें दिलें असेल, तर मात्र नियमित प्रेरणा निघतील. प्रत्यक्ष कोनांचीं परिमाणें दिलेलीं असतात किंवा घटक प्रेरणा अमक्या दोन रेषांशीं समांतर असाव्या, असें दिलेलें असतें.





समजा कीं, अख रेषेनें दर्शविणाऱ्या प्रेरणेचें पृथक्करण करणें आहे. तिच्या घटक प्रेरणा अखशीं अनुक्रमें १५ व ३०° अंशांचे कोन करितात किंवा त्या नक्ष व नय यांशीं समांतर आहेत.

तर अ बिंदूवून अखशीं १५° चा कोन करणारी किंवा नक्षशीं समांतर अशी अग रेषा काढ. तसेंच अ पासून अखशीं ३०°

चा कोन करणारी किंवा नयशीं समांतर रेषा काढ. नंतर ख पासून खग व खक अग, अकशीं समांतर काढ. त्या अग व अक यांस ग आणि क या बिंदूंत मिळतील. तर अग व अक या दोनच घटक प्रेरणा दिलेल्या दिशेनें कार्य करणाऱ्या निघाल्या.

(३७) त्रिकोणमितीनें हे कोन माहीत असले म्हणजे घटक प्रेरणांची परिमाणें काढितां येतात. अख रेषेनें दर्शविलेली प्रेरणा प आहे आणि हिच्या दिशेशीं हिच्या घटकांच्या दिशा जे कोन करितात ते थ, घ आहेत असें घेऊं; म्हणजे ∠खअग = थ, ∠खअक = घ.

त्रिकोणमितीवरून

अग: अख : : भु·(अखग) : भु·(अगख).

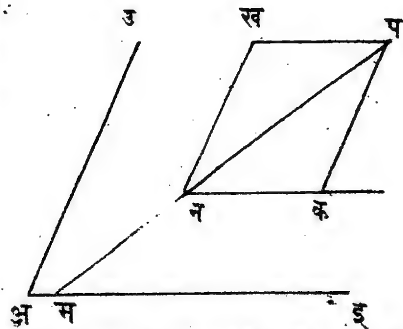
: : भु·(खअक) : भु·(गअक).

: : भु·(घ) : भु·(थ+घ).

$$\therefore \text{अग} = \text{अख}\,\frac{\text{भु}\cdot\text{घ}}{\text{भु}\cdot(\text{थ}+\text{घ})} = \text{प}\,\frac{\text{भु}\cdot(\text{घ})}{\text{भु}\cdot(\text{थ}+\text{घ})}.$$

तसेंच
$$\text{अक} = \text{अख}\,\frac{\text{भु}(\text{थ})}{\text{भु}(\text{थ}+\text{घ})} = \text{प}\,\frac{\text{भु}\cdot(\text{थ})}{\text{भु}\cdot(\text{थ}+\text{घ})}.$$

(३८) साधारणतः ज्या दोन रेषांशीं घटक प्रेरणा समांतर असावयाच्या त्यांमधील कोन, आणि दोहोंपैकीं एकीशीं दिलेली प्रेरणा जो कोन करील तो कोन असे दिलेले असतात.



प ही दिलेली प्रेरणा न बिंदूवर कार्य करीत असून तिच्या दोन अशा घटक प्रेरणा काढावयाच्या कीं त्यांच्या दिशा अइ आणि अउ या स्थिर रेषांशीं समांतर होतील. अइ व अउ यां मधील कोन म आहे आणि दिलेली प प्रेरणा अइशीं थ कोन क

रिते. नप, अईस म स्थळीं मिळेपर्यंत वाढीव. ∠उअइ = म, ∠पमइ = ϑ.

न बिंदुपासून नक, नख रेषा अइ व अउशीं समांतर काढ. नंतर प बिंदूपासून त्याच रेषांशीं समांतर रेषा काढ. म्हणजे नकपख हा समांतरभुज चौकोन झाला. यांत नप ही नक व नख यांची फलित प्रेरणा आहे. नक व नख अइ व अउशीं समांतर आहेत. म्हणून नक व नख हे प चे इष्टघटक झाले. आतां यांच्या किमती दिलेली प्रेरणा प आणि दिलेले कोन यांमध्यें काढूं.

∠पनक = ∠नमइ = ϑ; ∠खनक = ∠उअई = म.

∴ ∠खनप = ∠नपक = ∠म − ϑ.

नक व नख प्रेरणा क, ख अक्षरांनीं दर्शवूं.

नकप त्रिकोणांत—

$$\frac{\text{नक}}{\text{नप}} = \frac{\text{क}}{\text{प}} = \frac{\text{भु}\cdot(\text{नपक})}{\text{भु}\cdot(\text{नकप})} = \frac{\text{भु}\cdot(\text{खनप})}{\text{भु}\cdot(\text{खनक})} = \frac{\text{भु}\cdot(\text{म}-\vartheta)}{\text{भु}(\text{म})}.$$

$$\therefore \text{क} = \text{प}\ \frac{\text{भु}\cdot(\text{म}-\vartheta)}{\text{भु}(\text{म}\cdot)}$$

$$\text{तसेंच}\ \frac{\text{कप}}{\text{नप}} = \frac{\text{नख}}{\text{नप}} = \frac{\text{ख}}{\text{प}} = \frac{\text{भु}\cdot(\text{पनक})}{\text{भु}\cdot(\text{नकप})} = \frac{\text{भु}\cdot(\vartheta)}{\text{भु}\cdot(\text{म})}$$

$$\therefore \text{ख} = \text{प}\ \frac{\text{भु}\cdot \vartheta.}{\text{भु}\cdot \text{म}.}$$

जेव्हां दिलेल्या दोन रेषांमधील कोन काटकोन असतो. तेव्हां घटक प्रेरणांच्या किमती अशा होतील.

$$\text{क} = \frac{\text{प भु}\cdot(९० - \text{अ})}{\text{भु}\cdot(९०)} = \text{प}\cdot\text{को}\cdot\text{भु}\cdot(\vartheta).$$

$$\text{कारण भु}\cdot(९० - \vartheta) = \text{को}\cdot\text{भु}\cdot\vartheta.$$

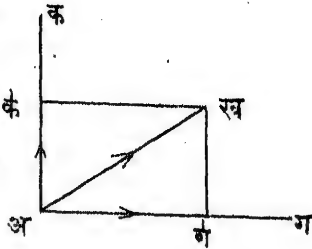
$$\text{भु}\cdot(९०^\circ) = १$$

$$ख = \frac{प \cdot भु(\theta)}{भु\cdot(९०)} = प\, भु\cdot(\theta).$$

बहुधां परस्पर काटकोन करणाऱ्या अशा दोन रेषांत किंवा त्यांशीं समांतर अशा घटक प्रेरणांत दिलेल्या प्रेरणांचें पृथक्करण करितात, आणि दिलेल्या रेषांपैकीं एका रेषेशीं दिलेली प्रेरणा जो कोन करिते तो म्हणजे θ कोन मात्र दिलेला असतो, व तेवढ्यावरून घटक प्रेरणांचीं परिमाणें काढितां येतात. याचाउपयोग पुढें वरचेवर येईल. यास्तव यांची सत्यता प्रत्यक्ष आकृतीनें दाखवितों.

समजा कीं, अख रेषेनें दर्शविणाऱ्या प प्रेरणेचे परस्पर काटकोन करणाऱ्या क आणि ग प्रेरणांमध्यें पृथक्करण करणें आहे. ग एक घटक प्रेरणा अखशीं θ कोन करिते.

तर अ पासून अखशी θ कोन करणारी रेषा अग काढ. नंतर अक, अगशीं लंब काढ. नंतर खतून अग आणि अक यांशीं समांतर रेषा काढून अकखग हा समांतरभुज चौकोन पुरा कर.



$$\frac{अग}{अख} = कों\cdot भु\cdot(\theta) \quad \therefore \frac{ग}{प} = कों\cdot भु\cdot(\theta) \quad \therefore ग = प\, कों\, भु\cdot(\theta)$$

$$\frac{अक}{अख} = कों\cdot भु\cdot(९० - \theta), = भु(\theta) \quad \therefore \frac{क}{प} = भु(\theta) \therefore क = प भु(\theta)$$

यास्तव दिलेल्या प्रेरणेचें, त्यांच्या दिशा परस्परांशीं लंब आहेत. अशा दोन घटकांत पृथक्करण करणें असेल आणि एक घटक प्रेरणा दिलेल्या प्रेरणेशीं जो कोन करिते तो कोन दिला असेल. तेव्हां दिलेल्या प्रेरणेस त्या कोनाच्या को भुजिज्येनें व भुजिज्येनें गुणून घटक प्रेरणा एकदम काढितां येतील.

जेव्हां एका प्रेरणेच्या दोन घटकांच्या दिशा परस्परांशीं काटकोन करितात, तेव्हां प्रत्येक घटकास त्याच्या दिशेंतील पृथग्भूत भा-

ग असें म्हणतात. जेव्हां प्रेरणेचा विवक्षित दिशेंतील पृथग्भूत भाग असें म्हटलें असेल तेथें असें समजावयाचें कीं, प्रेरणेचें अशा दोन घटकांत पृथक्करण केलें आहे कीं, एक दिलेल्या दिशेंत व दुसरा तिच्याशीं लंब दिशेंत व त्याच पातळींत असे कार्य करितात.

वरील सिद्धांताची खालील परिभाषा ही कित्येक वेळां उपयोगी पडते.

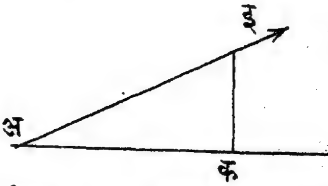
(३९) दिलेल्या दिशेंत विवक्षित प्रेरणेचा परिणाम काढणें.

अ ख रेषेनें दर्शविणाऱ्या प प्रेरणेचा दिलेल्या दिशेंत परिणाम काढणें आहे.

अ पासून अग रेषा दिलेल्या दिशेशीं समांतर काढ, तर अस्थळींच्या कणास अग रेषेंत ओढण्याचें प प्रेरणेचें किती सामर्थ्य आहे, हें काढावयाचें आहे. (मागील आकृति पहा.)

ख पासून खग हा अगवर लंब काढ. आणि अगखक हा समांतर भुज चौकान पुरा कर.

तर अग व अक या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा प आहे; परंतु अगवरअक लंब असल्यामुळें, अक प्रेरणेचें अग दिशेंत कांहीं कार्य घडणार नाहीं. म्हणून अग प्रेरणा प प्रेरणेचा अग दिशेंतील सर्व परिणाम दाखविते.



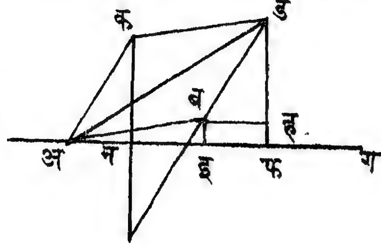
या करितां जर अइ रेषा एका प्रेरणेचें परिमाण व दिशा दर्शवीत असेल आणि तिचा अउ शीं समांतर अशा कोणत्याही रेषेंत किती परिणाम घडेल हें काढणें असेल तर इ पासून अउ वर इक लंब काढावा. म्हणजे अक रेषा तो परिणाम दर्शवील.

या रीतीनें त्रिकोण मितीच्या सहाय्यानें प्रेरणांचें पृथक्करण करून अनेक प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेंचें परिमाण व दिशा काढितां ये-

तात. जेव्हां प्रेरणेच्या दोन घटकाच्या दिशा परस्पर काटकोन करितात तेव्हां त्येक घटकास त्या दिशेंतील प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग असें म्हणतात. जेव्हां आम्ही प्रेरणेच्या विवक्षित दिशेंत कार्य करणारा पृथग्भूत भाग असें म्हणूं तेव्हां असें समजावयाचें कीं; प्रेरणेचे अशा दोन घटकांत पृथक्करण केलें आहे कीं, एक घटक दिलेल्या दिशेंत व दुसरा तिच्याशीं लंब दिशेंत असे कार्य करितात.

(४०) कोणत्याही दिलेल्या दिशेंत एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग त्याच दिशेंत त्यांच्या घटक प्रेरणेच्या पृथग्भूत भागांच्या बेरजे बरोबर असतो.

अब, अक रेषा दोन प्रेरणा दर्शवितात. **अबडक** समांतरभुज चौकोन काढ. म्हणजे **अड** रेषा त्यांची परिणामी प्रेरणा दर्शवील.



अतून जाणारी **अग** ही एक रेषा आहे. या रेषेंत **अब**, **अक** आणि **अड** यांच्या घटक प्रेरणा काढिल्या तर **अड**ची घटक प्रेरणा **अब**, **अक** यांच्या घटक प्रेरणांच्या बेरजे बरोबर होईल. **ब,क** आणि **ड** पासून **अग** वर **बइ**, **कन** आणि **डफ** हे लंब काढ. आणि **ब** पासून **अग**शीं **बह** समांतर काढ. तर **अफ**, **अड**ची, **अइ**, **अब**ची, आणि **अन**, **अक**ची घटक प्रेरणा होईल.

अफ = अइ + फइ;

फइ = बह = अन.

कारण **अकन** आणि **डबह** या दोन त्रिकोणांत अक = डब, ∠कअन = ∠डबह, आणि ∠अनक = ∠बहड = ९०°; म्हणून हे त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि अन = बह.

∴ अफ = अइ + अन.

(४१) अनेक प्रेरणा एका बिंदुस्थळीं कार्य करीत असतील, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी. आणि अनेक प्रेरणा समतोल राहण्यास कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात तें पाहूं.

(४२) जर अनेक प्रेरणा एकाच रेषेंत कार्य करीत असतील, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा त्यांच्या साध्या बेरजेबरोबर होईल.

समजा कीं, $क_1, क_2, क_3, \cdots$ प्रेरणा एका रेषेंत एका दिशेस कार्य करीत असतील आणि $ख_1, ख_2, ख_3$ इत्यादि त्याच रेषेंत पण विरुद्ध दिशेनें कार्य करीत असतील तर एकेका दिशेस कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणा अशा होतील.

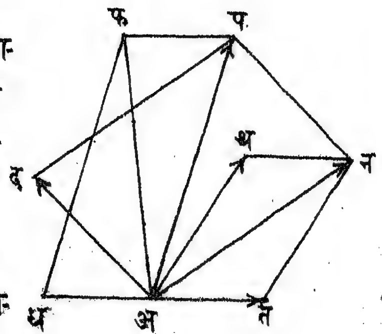
$$क_1 + क_2 + क_3 + क_4 \cdots\cdots = प_1.$$
$$ख_1 + ख_2 + ख_3 + ख_4 \cdots\cdots = प_2.$$

या प्रेरणा परस्पर विरुद्ध आहेत म्हणून त्यांच्या वजाबाकी बरोबर परिणामी प्रेरणा होईल, व जी प्रेरणा मोठी असेल त्या दिशेस कार्य करील.

$$(क_1 + क_2 + क_3 \cdots) - (ख_1 + ख_2 + ख_3 \cdots) = प_1 - प_2 = प$$

(४३) भिन्नभिन्न दिशांनीं कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करतील तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा काढणें.

अत, अथ, अद, अध... रेषा $क_1, क_2, क_3, क_4 \cdots$ प्रेरणा दर्शवितात. त्या अ बिंदूवर कार्य करीत आहेत. यांची परिणामी प्रेरणा काढणें आहे. अत, अथ यांवर समांतरभुज चौकोन तथ काढून त्याचा अन कर्ण काढ. तर अन रेषा $क_1, क_2$ यांची परिणामी प्रेरणा दर्शविते.

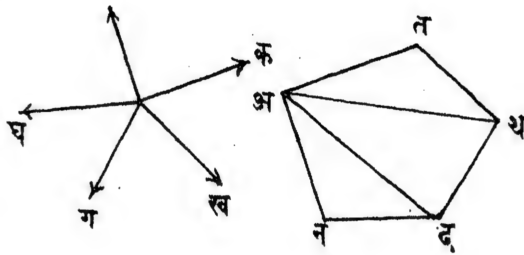


याचप्रमाणें अन आणि अद यांवर समांतरभुज चौकोन काढ. तर त्याचा कर्ण अप क१, क२ आणि क३ यांची परिणामी प्रेरणा होईल. तसेंच अफ आणि अध यांची परिणामी प्रेरणा अफ ही क१, क२, क३ आणि क४ यांची परिणामी प्रेरणा होईल. या प्रमाणें करीत गेल्यानें कितीही प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा काढितां येते.

(४४) एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा केवळ भूमितीनें काढितां येते.

समजा कीं, क, ख, ग, घ... इत्यादि अनेक प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करीत आहेत.

अ हा एक कोणता तरी बिंदू घेऊन त्यांतून क प्रेरणेशीं समांतर रेषा काढ. आणि अत लांबी क प्रेरणेच्या प्रमाणांत घे. नंतर त पासून ख प्रेरणेशीं समांतर काढून तथ रेषेची लांबी ख च्या

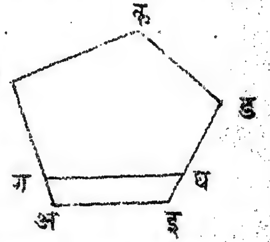


प्रमाणांत घे. थ पासून गशीं समांतर रेषा काढून थद तिच्या प्रमाणांत घे. आणि तसेंच द पासून घशीं समांतर काढून दन तिच्या प्रमाणांत घे. तर अन रेषा त्या सर्वांची परिणामी प्रेरणा परिमाणानें व कार्यमार्गानें दर्शवील.

प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांतावरून ही गोष्ट उघड आहे. कारण अत, तथ यांची परिणामी प्रेरणा अथ होईल. परंतु या रेषा क, ख प्रेरणा दर्शवितात. म्हणून क, ख यांची परिणामी प्रेरणा अथ आहे. अथ आणि थद यांची, म्हणजे क, ख, ग, यांची परिणामी प्रेरणा अद होईल; आणि अद आणि

दन यांची म्हणजे क, ख, ग, घ याची अन ही परिणामी प्रेरणा होईल. या प्रमाणें कितीही प्रेरणा असल्या तरी परिणामी प्रेरणाकाढितां येईल.

(४७) प्रेरणा बहुकोण— जर बहुकोणाच्या बाजू क्रमानें अनेक प्रेरणांची परिमाणें व कार्यमार्ग दर्शवितील, तर त्या प्रेरणा समतोल असतील. अ ब क ड इ ही एक पांच बाजूंची बहुकोणाकृति आहे हिच्या अ ब, ब क, क ड, ड इ आणि इ अ रेषा पांच प्रेरणांची परिमाणें आणि कार्यमार्ग दर्शवील, तर त्या प्रेरणा समतोल असतील.



कारण मागील कलमांतील सिद्धांता वरून अ ब, ब क, क ड, ड इ यांची परिणामी प्रेरणा अ इ आहे. या करितां ही व पांचवी प्रेरणा इ अ समान व विरुद्ध असल्यानें समतोल होतील. यास्तव अ ब, ब क, क ड, ड इ आणि इ अ या पांचही प्रेरणा समतोल राहतील.

या सिद्धांतास प्रेरणा बहुकोण म्हणतात. प्रेरणा त्रिकोणा विषयीं ज्या गोष्टी क. ३०   यांत सांगितल्या आहेत, त्या यासही लागू आहेत.

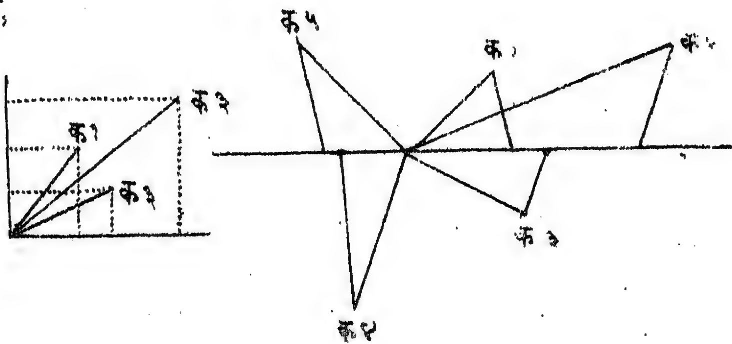
प्रेरणा त्रिकोणाचा जसा विपर्यय खरा आहे, तसा प्रेरणा बहुकोणाचा नाहीं. म्हणजे चार किंवा अधिक प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करून त्यास समतोल ठेवितील, तर ज्या बहुकोणांच्या बाजू प्रेरणांच्या कार्यमार्गाशीं समांतर आहेत, त्या प्रेरणांच्या प्रमाणांत सर्वदां असूं शकत नाहींत. कारण वरील आकृतींत जर अ इशीं ग घ समांतर काढिली, तर अ ब क ड इ आणि ग ब क ड घ हे बहुकोण समकोण आहेत, परंतु सरूप नाहींत म्हणजे दोहोंच्या सर्व बाजू परस्पर प्रमाणांत असत नाहींत. यास्तव बहुकोणाकृतीच्या बाजू प्रेरणांशीं प्र-

मांतर असल्या, तरी त्यांशीं प्रमाणांत नसतात.

(४६) आतां अनेक प्रेरणा एका पातळींत कार्य करीत असतील, तेव्हां त्यांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिणाम आणि दिशा त्रिकोणमितीच्या आधारें काढण्याची रीति सांगतों.

क$_1$, क$_2$, क$_3$, क$_4$ इत्यादि प्रेरणा आहेत; आणि अ$_1$, अ$_2$, अ$_3$, अ$_4$ इत्यादि कोन त्या प्रेरणा एका स्थिर रेषेशीं करितात.

तर क· प्रमाणें क$_1$ प्रेरणेचें पृथक्करण करून क$_1$ को· भु·(अ$_1$) आणि क$_1$ भु·(अ$_1$) असे दोन घटक दिलेल्या स्थिर रेषेंत व तिच्याशीं काटकोन करणाऱ्या रेषेंत काढितां येतील. तसेंच क$_2$ प्रेरणेचे क$_2$ को· भु·(अ$_2$) आणि क$_2$ भु·(अ$_2$) असे दोन घटक काढतां येतील. या प्रमाणें इतर प्रेरणांचेंही स्थिर रेषेंत व तिच्याशीं काटकोन करणाऱ्या रेषेंत कार्य करणारे घटक निघतील. एका रेषेंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या बेरजेबरोबर त्यांची परिणामी प्रेरणा असते. म्हणून स्थिर रेषेंत कार्य करणाऱ्या घटकांची व तिच्याशीं काटकोन करणाऱ्या रेषेंत कार्य करणाऱ्या घटकांची बेरीज करून त्यांस क्ष आणि य हीं नांवें देऊं. म्हणजे,



क$_1$ को· भु·(अ$_1$) + क$_2$ को· भु·(अ$_2$) + क$_3$ को· भु·(अ$_3$) ······ = क्ष.

क$_1$ भु·(अ$_1$) + क$_2$ भु·(अ$_2$) + क$_3$ भु·(अ$_3$) ······ = य.

या प्रेरणा परस्पर काटकोन करितात. त्यांची परिणामी प्रेरणा प आणि ती स्थिर रेषेशीं जो कोन करिते तो ब अक्षरें असतील, तर—

(क. २७) $क्ष^{२} + य^{२} = प^{२}$

$प\ को \cdot भु \cdot (ब) = क्ष;\ \therefore\ को \cdot भु \cdot (ब) = \frac{क्ष}{प}.$

$प\ भु \cdot (ब) = य;\ \therefore\ भु \cdot (ब) = \frac{य}{प}.$

$स \cdot रे \cdot (भु \cdot ब) = \frac{य}{क्ष}$

(४७) या प्रेरणा समतोल असण्यास त्यांची परिणामी प्रेरणा शून्य झाली पाहिजे.

$प = ०,\ प^{२} = ०;\ क्ष^{२} + य^{२} = ०$

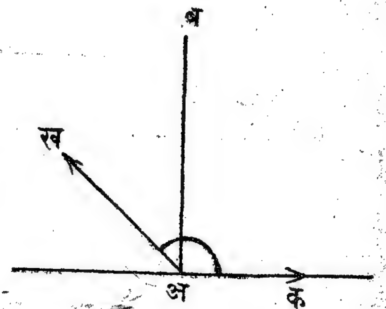
$\therefore\ क्ष = ०,\ य = ०.$

म्हणजे प्रेरणा समतोल असण्यास विवक्षित स्थिर रेषांतील त्यांच्या घटकांची बेरीज शून्य असली पाहिजे.

आतां प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाचीं आणखी कांहीं उदाहरणें करून दाखवितों.

उदाहरण १.— ज्यांच्या दिशा परस्परांशीं १३५° चा कोन करितात अशा दोन प्रेरणा पदार्थावर एका बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत. यांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण लहान प्रेरणे बरोबर आहे. तर त्या दोन प्रेरणांमधील प्रमाण काढ.

क आणि ख या दोन प्रेरणा अ स्थळीं कार्य करीत आहेत. या पैकीं क ही लहान आहे. अ क ही क प्रेरणेची दिशा आहे. अ पासून अब अकवर लंब काढ.



क, ख यांची परिणामी प्रेरणा क बरोबर दिली आहे ती अ कशीं थ कोन करिते असें घेऊं.

या तीनही प्रेरणांचे अ क, अ ब रेषांत कार्य करणा-

त्या प्रेरणांत पृथक्करण कर. अक रेषेंतील दोहों प्रेरणांच्या पृथग्भूत भागांच्या बेरजेबरोबर त्यांच्या परिणामी प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग असतो. (क. ४० .)

∴ क + ख कोभु (१३५°) = क कोभु (७) .... (१)

ख भु (१३५°) = क भु (७) — — (२)

वर्ग करून आणि (१) आणि (२) यांची बेरीज करून

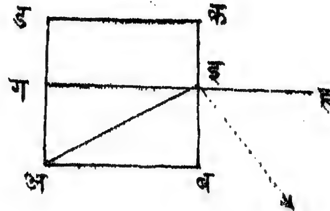
$क^2 + २ क ख कोभु १३५ + ख^2 = क^2$

∴ ख + २ क कोभु १३५ = ०

∴ ख = २ क × $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $\frac{ख}{क} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

(२) अबकड हा चौरस आहे. १ शेराची प्रेरणा अड दिशेनें कार्य करिते. २ शेरांची अब दिशेनें आणि ३ शेरांची कब दिशेनें कार्य करितात. तर यांची परिणामी प्रेरणा काढ.



चौरसाची बक बाजू इ स्थळीं दुभागून अब ह्ला गइ समांतर चौकोन काढ. आणि अइ सांध.

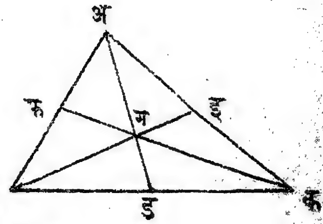
जर अब रेषा २ शेरांची प्रेरणा दर्शवील तर अग १ शेराची दर्शवील. अब आणि अग या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अइ आहे. ही प्रेरणा इ स्थळीं नेली व तिचें त्या स्थळीं मूळच्या प्रेरणांत पृथक्करण केलें तर १ शेराची प्रेरणा इक रेषेंत कार्य करील आणि २ शेरांची प्रेरणा अब शीं समांतर अशा इह रेषेंत कार्य करील, परंतु तिसरी ३ शेरांची प्रेरणा कब रेषेंत कार्य करीत आहे, ती क पासून इ स्थळीं नेली तर इ स्थळीं इक दिशेनें १ शेराची आणि इब दिशेनें ३ शेरांची अशा कार्य करितात म्हणून

न त्यांची परिणामी प्रेरणा २ शेरांची असेल व ती इब दिशेनें कार्य करील.

आतां इ स्थळीं प्रत्येक २ शेरांची अशा दोन प्रेरणा कार्य करीत असून त्यांच्या दिशांमधील कोन काटकोन आहे.

यास्तव त्यांची परिणामी प्रेरणा $\sqrt{(४+४)}=२\sqrt{२}$ होईल आणि तिची कार्यदर्शक रेषा इब शीं ४५° चा कोन करील.

(३) अबक एक त्रिकोण आहे. बक, कअ आणि अब या बाजूंचे मध्य अनुक्रमें ड, इ, फ आहेत तर असें सिद्ध करकीं, अड, बइ, कफ. या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा समतोल राहतील.



अड, बइ, कफ या रेषा एका बिंदूंत परस्परांस छेदितात तो बिंदु ग आहे. आणि त्या बिंदुस्थळीं या प्रेरणा कार्य करितात असें कल्पू.

अब आणि अक या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अड दिशेंत कार्य करील. आणि परिमाणानें अडच्या दुप्पट असेल. (क. २८) म्हणून अब आणि अक यांचे अर्ध अफ आणि अइ या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अड रेषा दिशेनें व परिमाणानें दर्शवील. तसेंच बइ आणि कफ रेषा बफ आणि बड आणि कइ व कड यांच्या अनुक्रमें परिणामी प्रेरणा दर्शवितात. यास्तव अड बइ आणि कफ प्रेरणा अफ, बफ व बड व कड आणि कइ व अइ या प्रेरणां बरोबर आहेत. परंतु अफ, बफ समान व परस्पर उलट आहेत, तसेच कइ व अइ आणि बड व कड आहेत. म्हणून त्यास हा समतोल आहेत. या प्रेरणां यांच्या बरोबरीच्या अड, बइ आणि कफ याही समतोल आहेत.

(४) मागील उदाहरणाच्या आकृतींत गअ, गब, गक या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतील.

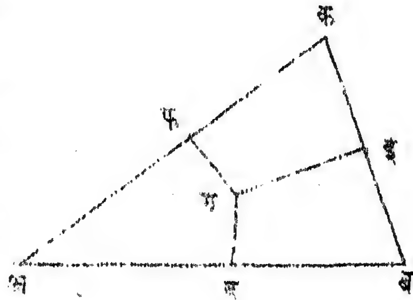
गअ आणि गब प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा गफ दिशेनें कार्य करील व परिमाणानें तिच्या दुप्पट असेल. परंतु कग रेषा गफच्या दुप्पट आहे म्हणून २ गफ आणि कग या प्रेरणा समान व उलट म्हणून समतोल आहेत.

टीप— गड, गढ आणि गफ यातील रेषा अग, बग आणि कग यांच्या अनुक्रमें निम्म आहेत. म्हणून त्या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणाही समतोल आहेत.

(५) त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंशीं प्रमाणांत असणाऱ्या व त्यांवर लंब अशा दिशांनीं बाजूंच्या मध्य बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणा समतोल असतात.

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यापासून बाजूवर काढलेले लंब परस्पर एका बिंदूंत मिळतात. व तो बिंदु त्रिकोणा भोंवती काढलेल्या वर्तुळाचा मध्य असतो म्हणून या प्रेरणा एका बिंदूंत मिळतात ज्या बाजूवर लंब असतील त्या बाजूंच्या मधील कोनाचा परिपूरक दोहों लंबा मधील कोन असतो.

अबक त्रिकोणाच्या अब, बक, आणि अक या बाजूंचे मध्य ड, ढ, फ आहेत. यांपासून बाजूवर काढलेले लंब ग स्थळीं मिळतात.



डगढ कोन बचा परिपूरक आहे, डगफ आणि फगढ हे कोन अ आणि क यांचे परिपूरक आहे.

गड, गढ, आणि गफ या दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेर-

णा बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत. बाजू त्यांसमोरील कोनांच्या भुजिज्यांशीं प्रमाणांत असतात. कोनांच्या भुजिज्या त्यांच्या सप्लिमेंटाच्या भुजिज्यांबरोबर असतात म्हणून प्रत्येक प्रेरणा दुसऱ्या दोहोंच्या मधील कोनाच्या भुजिज्येशीं प्रमाणांत असते. यास्तव (क० ३२) त्या समतोल आहेत. जसें—

डग : इग : फग : : अब : बक : अक.

: : भु॰(क) : भु॰(अ) : भु॰ (ब).

: : भु॰(फगइ) : भु॰(फगड) : भु॰ (डगई).

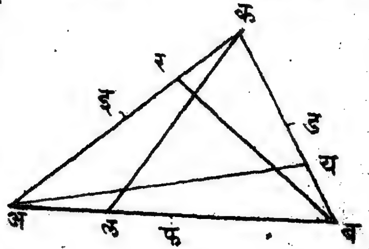
(६) त्रिकोणाच्या कोनबिंदूपासून समोरच्या बाजूंवर काढलेल्या लंबरेषांत कार्य करणाऱ्या तीन प्रेरणा अनुक्रमें बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत. तर त्या समतोल असतील.

हेही लंब एका स्थळीं परस्पर छेदितात. लंबांमधील कोन त्रिकोणांच्या कोनांचे सप्लिमेंट असतात. म्हणून त्यां लंबरेषांत कार्य करणाऱ्या व बाजूंशीं प्रमाणांत असणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात.

(७) अबक त्रिकोणाच्या बक, कअ आणि अब या बाजूंत य, र, ल हे असे बिंदु घेतले आहेत कीं;—

$$\frac{\text{बय}}{\text{यक}} = \frac{\text{कर}}{\text{अर}} = \frac{\text{अल}}{\text{बल}}.$$

तर असें सिद्ध कर कीं अय, बर आणि कल रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करतील तर समतोल असतील.



ड, इ, फ हे बाजूंचे मध्य काढ. अड, बइ आणि कफ रेषा काढिल्या आहेत असें समज.

अय प्रेरणेचें अड आणि डय यांमध्यें पृथक्करण क-

रितां येईल. तसेंच बरचें बइ, इर यामध्यें आणि कलचें कफ आणि फल यांमध्यें करितां येईल.

म्हणून अय, बर, कल प्रेरणा अड, बई आणि कफ यान तीन वडय, इर आणि फल या तीन प्रेरणा अशा सहा प्रेरणांबरोबर आहेत. परंतु उ० ३ प्रमाणें अड, बइ आणि कफ या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा समतोल आहेत. बाकी डय, इर आणि फल प्रेरणा त्रिकोणाच्या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत. कारण-

$$\frac{\text{बय}}{\text{यक}} = \frac{\text{कर}}{\text{अर}} = \frac{\text{अल}}{\text{बल}}.$$

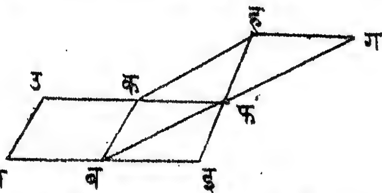
$$\frac{\text{यक} - \text{बय}}{\text{बय} + \text{यक}} = \frac{\text{अर} - \text{कर}}{\text{अर} + \text{कर}} = \frac{\text{बल} - \text{अल}}{\text{अल} + \text{बल}}.$$

$$\frac{\text{डय}}{\text{बक}} = \frac{\text{इर}}{\text{कअ}} = \frac{\text{फल}}{\text{अब}}$$

डय, इर आणि फल या त्रिकोणाच्या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणून संमतोल आहेत. यास्तव अय, बर, कल समतोल आहेत.

(८) अबकड हा समांतरभुज चौकोन आहे. अब, बक आणि कड रेषा तीन प्रेरणांची परिमाणें व स्थानें दर्शवितात. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.

अब वाढवून बइ, अब बरोबर कर. अब, बक प्रेरणा ब स्थळी कार्य करितील. बइ, बक त्यांचीं परिमाणें व दिशा दर्शवितील. बईफक समांतरभुज चौकोन काढ, म्हणजे बफ



अब, बक प्रेरणांची फलित प्रेरणा झाली. कफ = कड ∴ कड प्रेरणा फक बरोबर आहे. आतां कफ आणि बफ यांची फलितप्रे-

रणा काढावयाची आहे.

बफ वाढवून फग, बफ बरोबर कर. फग रेषा बफ प्रेरणा दर्शविते. ईफ वाढवून फह, इफ बरोबर कर; आणि गह, कह सांध.

कफगह हा समांतरभुज चौकोन आहे. कारण-
फह = फइ = बक. आणि परस्पर समांतर ∴ बफ = कह = फग आणि समांतर. म्हणून कफ, हग शीं समांतर आहे.
∴ फह फक आणि फग यांची म्हणजे अब, बक आणि कड यांची फलित प्रेरणा झाली. ती बक बरोबर आहे.

उदाहरणें.

(१) ३, ६, ९ शेरांच्या प्रेरणा एका कणावर कार्य करीत असतां तो कण स्थिर राहतो. तर त्या तीनही एकाच रेषेंत कार्य करितात असें दाखीव.

(२) वरील प्रेरणा एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूंशीं समांतर अशा दिशांनीं कार्य करीत आहेत, तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ० ३√३ शेर ६ शेरांच्या प्रेरणेशीं काटकोन करणारी.

(३) दोन समान प्रेरणा एका कणावर कार्य करीत आहेत व त्यांची परिणामी प्रेरणा विवक्षित आहे. दोहोंपैकीं एक प्रेरणा जर उलट दिशेनें कार्य करील आणि तिचें परिमाण दुप्पट होईल, तरी ही परिणामी प्रेरणा पूर्वीच्या इतकीच असेल. तर दोन समान प्रेरणांच्या दिशांमधील कोन काढ.

उ० ६०°

(४) कखगघ चौरसाचे कर्ण न बिंदूंत परस्परांस छेदितात. न पासून चौरसाच्या कोन बिंदूपर्यंत काढलेल्या नक, नख, नग आणि

न घ या दिशांनीं ५, ६, ९, १० शेरांच्या प्रेरणा पदार्थावर एका बिंदुस्थळीं कार्य करितात. तर त्यांची फलित प्रेरणा काढ?

उ. $४\sqrt{२}$ शेर, **ग न घ** कोनास दुभागणाऱ्या रेषेंत.

(५) **प**, **प**$\sqrt{३}$ आणि **२प** अशा तीन प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करून त्यास स्थिर ठेवितात. तर त्यांच्या दिशांमधील कोन काढ.

उ. **प** आणि **प**$\sqrt{२}$ यांमध्यें ९०° **प** व **२प** यांमध्यें १२०°

प$\sqrt{३}$ आणि **२प** यांमध्यें १५०°.

(६) समभूज षट्कोनाच्या जवळजवळच्या पांच बाजूंशीं समांतर अशा दिशांनीं पांच समान प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करीत आहेत. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ?

उ० पांचांपैकीं एका प्रेरणेबरोबर आणि तिसऱ्या प्रेरणेच्या दिशेशीं समांतर अशा दिशेंत.

(७) त्रिकोणांत असा एक बिंदु काढ कीं, त्यापासून कोन बिंदूपर्यंत रेषा काढिल्या आणि त्या रेषा ज्या प्रेरणा दर्शवितील त्या प्रेरणा त्या बिंदूवर कार्य करतील, तर तो बिंदु स्थिर राहील.

उ० कोनबिंदु व समोरच्या बाजूचा मध्य यांस सांधणाऱ्या रेषांचा छेदनबिंदु.

(८) **अ ब क** त्रिकोणांत **न** हा एक बिंदु आहे. **ड इ फ** हे त्याच्या बाजूंचे मध्य आहेत. तर असें सिद्ध कर कीं, **न अ**, **न ब** आणि **न क** या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा **न ड**, **न ई**, **न फ** या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणांच्या बरोबरीच्या असतील.

(९) वर्तुळाच्या परिघाचे हवे तितके समान विभाग पाडिले. आणि विभागणाऱ्या एका बिंदूपासून बाकीच्या बिंदूंपर्यंत रेषा काढिल्या आहेत. तर या रेषांनीं ज्या प्रेरणा दर्शविल्या जातात, अशा प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करीत आहेत त्यांची फलित प्रेरणा काढ.

उ० ज्या बिंदूपासून रेषा काढिल्या आहेत त्या पासून काढलेल्या व्यासांत फलित प्रेरणा कार्य करील आणि तिचें परिमाण जितके भाग पाडिले असतील तितके त्रिज्येच्या पट असेल.

(१०) प प्रेरणेच्या दोन घटक प्रेरणा अशा काढ कीं, त्यां पैकीं प्रत्येक प्रेरणा प शीं ३०° चा कोन करील.

उ० प्रत्येक प√३.

(११) दोहों बाजूंस ६०° व ४५° चे कोन करणाऱ्या प प्रेरणेच्या २ घटक प्रेरणा काढ?

(उ. २प (१+√३), आणि प √६ (१+ √ ३)

(१२) ज्यांच्या दिशा परस्परांशीं काटकोन करितात अशा ५, २, ७, शेरांच्या तीन प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं कार्य करितात. त्यांच्या फलित प्रेरणेचें परिमाण काढ?

उ. √७८ शेर.

(१३) एका भरीव चौरसाच्या जवळ जवळच्या तीन बाजूंचे कर्ण तीन प्रेरणा दर्शवितात व त्या एका बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं त्याची फलित प्रेरणा भरीव चौरसाच्या कर्णाच्या दुप्पट होईल.

(१४) विवक्षित प्रेरणेचें विवक्षित परिमाणाच्या दोन प्रेरणांमध्यें कसें पृथक्करण करावें तें सांग? असें करणें कधीं अशक्य असतें.

(१५) प प्रेरणेचे असे दोन घटक काढ कीं, प्रत्येकाची कार्य दर्शक दिशा तिच्या दिशेशीं ३०° चा कोन असेल.

उ. प्रत्येक $\left(\frac{प}{\sqrt{३}}\right)$

(१६) प प्रेरणेचे असे दोन घटक काढ कीं त्यांच्या दिशा ति-

च्या कार्यदर्शक दिशेशीं अनुक्रमें ६०° व ४५° चे कोन करितील.

उ. $\frac{२प}{१+\sqrt{३}}$ आणि $\frac{प\sqrt{६}}{१+\sqrt{३}}$

(१७) जिचें वजन १० शेर आहे अशी एक तसबीर एका दोरीनें साफ गुळगुळीत खुंटीला टांगिली आहे. दोरीचीं दोन शेवटें तसबिरीला बांधलेलीं आहेत. जर दोरीचा ताण १० शेरांचा असेल तर खुंटीच्या दोहों बाजूंचीं शेवटें लंब म्हणजे विक् रेषेशीं ६०° अंशाचा कोन करितील. असें सिद्ध कर.

उ. प्रेरणांचें लंब व तिच्याशीं काटकोन करणाऱ्या रेषांत पृथक्करण कर.

(१८) १, $\sqrt{३}$, २ शेरांच्या प्रेरणा एका बिंदूवर कार्य करून त्यास स्थिर ठेवितात तर त्यांच्या दिशांमधील कोन काढ.

प्रकरण ४

समांतर प्रेरणा.

(४८) मागील प्रकरणांत प्रेरणाविषयीं जे सिद्धांत सांगितले त्यांत असें कल्पिलें होतें कीं, दोन किंवा अधिक प्रेरणा पदार्थावर एका स्थळीं किंवा एका बिंदूवर अगर एका कणावरच कार्य करीत आहेत. आतां दृढ पदार्थावर प्रेरणा अनेक स्थळीं कार्य करीत असतील. तर त्यांच्या परिणामांविषयीं विचार करूं. अशा प्रेरणांच्या दिशा परस्पर समांतर असतील, किंवा नसतील. जर प्रेरणा समांतर नसतील म्हणजे जर प्रेरणांच्या कार्यदर्शक रेषा परस्पर मिळत असतील, तर प्रेरणासंचरत्वाच्या नियमाप्रमाणें प्रेरणा छेदनबिंदुस्थळीं कार्य करितात असें कल्पून त्यांची परिणामी प्रेरणा काढितां येईल. प्रेरणा परस्पर समांतर अशा दिशांनीं अनेक स्थळीं कार्य करीत असतील. तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी, हें सांगतों

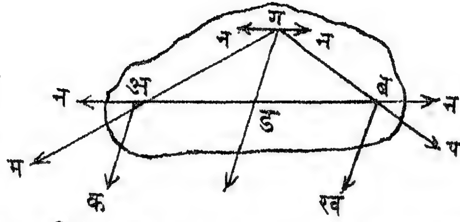
(४९) जेव्हां दोन प्रेरणा परस्पर समांतर अशा दिशांनीं कार्य करीत आहेत. तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी.

प्रेरणांचें कार्य परस्पर समांतर दिशांनीं होईल, तेव्हां त्याचें कार्य पदार्थाच्या अनेक बिंदूवर घडेल. जेव्हां समांतर प्रेरणा पदार्थास एकाच दिशेकडे म्हणजे बाजूकडे ओढीत असतील तेव्हां त्यास सजातीय प्रेरणा म्हणावें आणि ज्यांचें कार्य पदार्थावर परस्पर उलट दिशांनीं होइल, त्यांस विजातीय प्रेरणा म्हणावें.

प्रथम दोन सजातीय व समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कशी काढावी तें सांगतों.

क आणि **ख** या प्रेरणा विवक्षित पदार्थावर **अ**, **ब** बिंदुस्थळीं **अक** व **बख** या दिशांनीं कार्य करीत आहेत. या-

ची परिणामी प्रेरणा काढणें आहे.



अ ब बिंदु सांधून त्या रेषेंत परंतु परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या अशा दोन सारख्या न,न प्रेरणा अ न आणि ब न दिशांनीं पदार्थावर अ ब बिंदुस्थळीं कार्य करण्यास लाविल्या तर या दोन प्रेरणा परस्पर उलट दिशांनीं एका रेषेंत कार्य करणाऱ्या असल्यानें त्यांपासून क,ख प्रेरणांच्या परिणामांत कांहीं फरक होणार नाहीं. आतां क आणि न या दोहोंची परिणामी प्रेरणा (क. २१,२२ प्रमाणें) काढावी. तसेंच ख आणि न यांची परिणामी प्रेरणा काढावी. त्या अ म आणि ब प दिशांनीं कार्य करतील. अ म, ब प रेषा वाढविल्यास ग ठिकाणीं मिळतील. कारण ∠ग अ ब आणि ∠ग ब अ यांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी आहे. अ म, ब प प्रेरणा अ, ब बिंदूंपासून ग बिंदुस्थळीं प्रेरणा संचरत्वाच्या तत्वाप्रमाणें न्याव्या. नंतर ग स्थळीं त्यांचे मूळ प्रेरणांत पृथक्करण करावें, म्हणजे त्यांचे अवयव न, न एकाच रेषेंत, पण परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करितील, आणि परस्पर नाश पावतील, आणि दुसरे अवयव क,ख आणि ग ड दिशेनें कार्य करितील. यास्तव त्यांची परिणामी प्रेरणा क + ख, ग ड दिशेनें कार्य करणारी होईल. ग ड रेषा अ क किंवा ब ख शीं समांतर आहे. यास्तव क आणि ख या एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा क + ख म्हणजे त्यांच्या बेरजेबरोबर असून त्यांशीं समांतर अशा दिशेनें कार्य करणारी असते.

ही परिणामी प्रेरणा अ ब रेषेंत कोणत्या स्थळीं कार्य करील तें पाहूं.

अ ड ग त्रिकोणाच्या बाजू क,न,म, या तीन प्रेरणांच्या दि-

शांशीं समांतर आहेत, म्हणून प्रेरणा त्रिकोणाप्रमाणें, त्या बाजू क,न, म या प्रेरणांशीं प्रमाणांत आहेत.

$$\therefore \frac{\text{अड}}{\text{गड}} = \frac{\text{न}}{\text{क}}$$

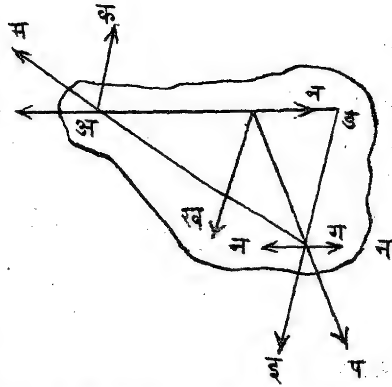
तसेंच $$\frac{\text{बड}}{\text{गड}} = \frac{\text{न}}{\text{ख}}$$

$$\therefore \frac{\text{अड}}{\text{बड}} = \frac{\text{ख}}{\text{क}}$$

यास्तव अड, बड हे विभाग प्रेरणांच्या व्युत्क्रम प्रमाणांत आहेत. जर अब = क्ष आणि अड = य. तर बड = क्ष-य.

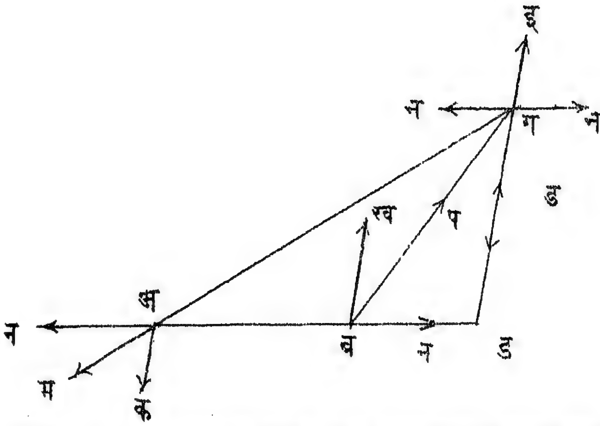
$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{क्ष-य}} = \frac{\text{ख}}{\text{क}} ;\ \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{ख}}{\text{क+ख}} \quad \therefore \text{य} = \frac{\text{खक्ष}}{\text{क+ख}}$$

(२) जेव्हां क, ख समांतर प्रेरणा परस्पर उलट अशा अक, बख दिशांनीं कार्य करीत असतील; तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा काढणें.



क,ख या दोन प्रेरणापैकीं ख प्रेरणा मोठी आहे असें घेऊं. पूर्वीप्रमाणें अ. ब रेषेंतअ, बस्थळीं न,न या एकाच रेषेंत परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा घेऊन, क,न आणि ख,न यांच्या परिणामी प्रेरणा काढून त्यांच्या दिशा वाढविल्या, म्हणजे त्या ग स्थळीं मिळतील. ग स्थळीं त्यांचे मूळच्या प्रेरणांत पृथक्करण केलें म्हणजे न,न प्रेरणा समान व परस्पर उलट असल्यानें नाश पावतील. क प्रेरणा ग इ दिशेनें कार्य करील. आणि ख, ग ड दिशेनें

कार्य करील. यास्तव त्यांची परिणामी प्रेरणा **ख-क** ही होईल व तिची दिशा ग ई म्हणजे **ब ख** शीं तुल्य असेल.



यास्तव दोन उलट दिशानीं कार्य करणाऱ्या समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा त्यांच्या वजाबाकीबरोबर असून त्यांशीं समांतर असते व तिची दिशा थोरल्या प्रेरणेशीं तुल्य असते.

याही परिणामी प्रेरणेची दिशा दर्शविणारी रेषा वाढविली; तर ती **अ ब** रेषा वाढविल्यास तिला **ड** बिंदूंत मिळेल, म्हणजे दोहों प्रेरणांच्या बाहेर **ड** बिंदु असेल. **अ ड ग** आणि **ब ड ग** त्रिकोणांच्या बाजू अनुक्रमें **क, न, म** आणि **ख, न, प** या प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत, म्हणून त्यांशीं प्रमाणांत आहेत.

$$\frac{अड}{गड} = \frac{न}{क} ; \frac{बड}{गड} = \frac{न}{ख} \therefore \frac{अड}{बड} = \frac{ख}{क}.$$

यास्तव **अ ड, ब ड** हे विभाग प्रेरणांच्या व्युत्क्रम प्रमाणांतच आहेत

जर अब = क्ष; अड = य, तर बड = य − क्ष.

$$\frac{य}{य-क्ष} = \frac{ख}{क} ; \frac{य}{क्ष} = \frac{ख}{ख-क} \therefore य = \frac{ख क्ष}{ख-क}.$$

(७०) यावरून असें स्पष्ट झालें कीं, दोन समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा मूळ प्रेरणांशीं समांतर असते. जेव्हां मूळ प्रेरणा एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या असतात, तेव्हां परिणामी प्रेरणा त्यांच्या बेरजे बरोबर असते व तिची कार्य करण्याची दिशा दोहोंमध्यें असते. आणि जेव्हां प्रेरणा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करितात, तेव्हां त्यांच्या वजाबाकीबरोबर त्यांची परिणामी प्रेरणा असते व तिची दिशा थोरल्या प्रेरणेच्या बाहेर व तिच्या दिशेशीं तुल्य असते.

आणखी हेंही लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं, क, ख सजातीय किंवा विजातीय प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचा कार्य करण्याचा ड बिंदु कायम असतो. म्हणजे क,ख समांतर प्रेरणांच्या दिशा अ,ब बिंदूभोंवतीं कशाही फिरविल्या तरी वरील सर्व कृति तशीच राहून तोच ड बिंदू येतो. म्हणून हा बिंदु समांतर प्रेरणांच्या दिशांवर अगदीं अवलंबून नसतो. तो केवळ त्यांच्या परिमाणावर अवलंबून असतो. यास्तव यास क,ख समांतर प्रेरणांचा मध्य असें म्हणतात.

जेव्हां उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या समांतर प्रेरणा समान असतात, तेव्हां वरील रचना अशक्य आहे. कारण अम आणि बप या परिणामी प्रेरणांच्या दिशा समांतर होतील आणि त्या एका बिंदून मिळणार नाहींत. अशा दोन प्रेरणांस जुळें किंवा युग्म असें म्हणतात. याविषयीं पुढें स्वतंत्र विचार केला आहे.

(७१) अनेक समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा काढणें.

क१, क२, क३, क४ इत्यादि अनेक समांतर प्रेरणा एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या असतील; आणि क१ आणि क२ यांची परिणामी प्रेरणा प१ असेल तर—

$$प_1 = क_1 + क_2.$$

$प_2$ ही $प_1$ आणि $क_3$ यांची परिणामी प्रेरणा असेल तर-

$$प_2 = प_1 + क_3.$$
$$= क_1 + क_2 + क_3.$$

जर $प_3 = प_2 + क_4 = क_1 + क_2 + क_3 + क_4$.

या प्रमाणें कितीही प्रेरणा असल्या, तरी याच प्रमाणें त्यांची परिणामी प्रेरणा सर्वांच्या बेरजेबरोबर होईल, म्हणजे जर $क_1$ $क_2$ $क_3$ इत्यादि न प्रेरणांचीप परिणामी प्रेरणा असेल तर-

$$प = क_1 + क_2 + क_3 + क_4 \cdots \cdots \cdots क_न$$

(७२) जर कांहीं समांतर प्रेरणा एका दिशेस कार्य करीत असतील आणि कांहीं त्यांच्या उलट दिशेनें कार्य करीत असतील, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढणें.

समजा कीं, $क_1, क_2, क_3, क_4$ इत्यादि समांतर प्रेरणा एका दिशेस आणि $ख_1$ $ख_2$ $ख_3$ इत्यादि समांतर प्रेरणा उलट दिशेस कार्य करीत असतील, तर समजा कीं पहिल्यांची परिणामी प्रेरणा क्ष आणि दुसऱ्यांची य असतील तर.

$$क्ष = क_1 + क_2 + क_3 \cdots$$
$$य = ख_1 + ख_2 + ख_3 \cdots$$

क्ष आणि य या परस्पर समांतर, परंतु उलट दिशांनीं कार्य करितात. यास्तव क्ष प्रेरणा यपेक्षां मोठी असेल तर त्यांची परिणामी प्रेरणा.

$$प = क्ष - य = (क_1 + क_2 + क_3 \cdots) - (ख_1 + ख_2 + ख_3 \cdots)$$

ही परिणामी प्रेरणा कोणत्या बिंदुस्थळीं कार्य करिते हें कसें काढावें हें पुढें सांगितलें आहे.

(७३) एका दिलेल्या प प्रेरणेचे तिच्या दोहीं बाजूंस दिलेल्या अंतरावर कार्य करणाऱ्या अशा दोन प्रेरणांत पृथक्करण करणें.

दिलेलीं अंतरें अ ब आहेत; ज्या प्रेरणा काढणें आहेत त्या क्ष आ-

णि य घेऊन त्यांच्या किमती काढूं.

(क. ४१) प= क्ष+य.

$$\frac{अ}{ब} = \frac{य}{क्ष}.$$

अक्ष= बय.

पब= बक्ष+ बय= बक्ष + अक्ष.

$$\therefore\ क्ष = \frac{पब}{अ+ब},\quad य = \frac{पअ}{अ+ब}$$

यास्तव दोहोंपैकीं एक प्रेरणा काढण्यास दिलेल्या प्रेरणेस दुसऱ्या प्रेरणेच्या अंतरानें गुणून त्यास दोहोंच्या अंतराच्या बेरजेनें भागावें.

(७,४) दिलेल्या प्रेरणेचें, तिच्या एकाच बाजूस दिलेल्या अंतरांवर कार्य करणाऱ्या प्रेरणांत पृथक्करण करणें.

दिलेलीं अंतरें अ,ब आहेत त्यांपैकीं अ मोठें अंतर आहे. ज्या दोन प्रेरणा काढणें आहेत त्या क्ष आणि य घेऊं. ज्यापेक्षां या दोन्ही प च्या एकाच बाजूस कार्य करणाऱ्या आहेत, त्या पेक्षां (क. ४१ [२] प्रमाणें) या उलट दिशांनीं कार्य करणाऱ्या असल्या पाहिजेत, आणि थोड्या अंतरावर कार्य करणारी प्रेरणा य ही पच्याच दिशेनें कार्य करणारी असली पाहिजे.

(क. ४१) य–क्ष=प.

$$\frac{अ}{ब} = \frac{य}{क्ष}.$$

अक्ष = बय.

$$\therefore\ क्ष = \frac{पब}{अ-ब};\quad य = \frac{पअ}{अ-ब}.$$

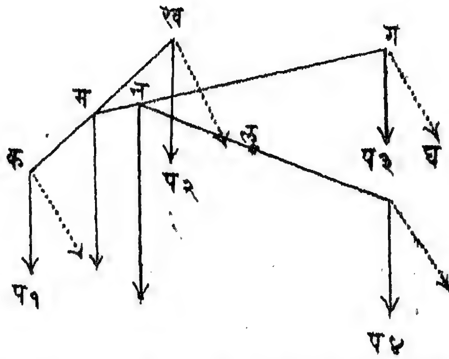
यास्तव दोहोंपैकीं एक प्रेरणा काढण्यास दिलेल्या प्रेरणेस

दुसरीच्या अंतरानें गुणून त्यास अंतरांच्या वजाबाकीनें भागावें.

(७७) मागें क ५१ यांत अनेक समांतर प्रेरणा पदार्थावर कार्य करीत असल्यास त्यांची परिणामी प्रेरणा त्यांच्या बेरजेबरोबर असते असें सिद्ध केलें; परंतु ती परिणामी प्रेरणा कोणत्या स्थळीं कार्य करिते तें स्थळ किंवा तो बिंदु कसा काढावा हें सांगितलें नाहीं; परंतु दोन प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा ज्या बिंदूंत कार्य करिते तो बिंदु कसा काढावा तें सांगितलें. आतां अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा कोणत्या बिंदूंत कार्य करिते तें कसें काढावें तें सांगतों.

जर एका दृढ पदार्थावर अनेक समांतर प्रेरणा कार्य करीत असतील, तर पदार्थ कसाही ठेविला आणि प्रेरणांची दिशा कशीही असली तरी त्यांची परिणामी प्रेरणा सर्वदां पदार्थाच्या एका विवक्षित बिंदूपासून कार्य करिते, त्या बिंदूस त्या प्रेरणांचा मध्य म्हणतात.

हा मध्य कसा काढावा तें सांगतों. समजा कीं, $प_1$ $प_2$ $प_3$ $प_4$ इत्यादि अनेक समांतर प्रेरणा एका दृढ पदार्थावर क, ख, ग, घ या बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत. क, ख बिंदु सांध आणि क ख रेषेचे म बिंदूंत असे दोन विभाग कर कीं, कम : खम :: $प_2$: $प_1$ म्हणजे त्यांची परिणामी प्रेरणा $प_1$ + $प_2$, म बिंदुस्थळीं कार्य करील, त्या दोहोंच्या जागीं ही प्रेरणा घे.



मग सांध आणि मग रेषेचे न बिंदूंत असे दोन विभाग कर कीं, मन : नग : : $प_3$: $प_1$+ $प_2$ म्हणजे म ठिकाणची $प_1$ + $प_2$ प्रेरणा आणि ग ठिकाणची $प_3$ प्रेरणा यांची परिणामी प्रेरणा $प_1$+

$प_२ + प_३$ न बिंदुस्थळीं कार्य करील. आतां न घ सांध आणि न घरे-षेचे ल स्थळीं असे विभाग करकीं, नल : लघ : : $प_४ : प_१ + प_२ + प_३$. म्हणजे न ठिकाणची $प_१ + प_२ + प_३$ प्रेरणा आणि घ ठिकाणची $प_४$ प्रेरणा यांची परिणामी प्रेरणा $प_१ + प_२ + प_३ + प_४$ ही ल ठिकाणीं कार्य करील.

यावरून जर चारच प्रेरणा असतील तर त्यांची परिणामी प्रेरणा ल स्थळीं कार्य करील. म्हणून क, ख, ग, घ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या $प_१$ $प_२$ $प_३$ $प_४$ या प्रेरणांचा ल हा मध्य झाला. म्हणून या चार प्रेरणांनीं चार ठिकाणीं कार्य केलें किंवा त्यांच्या परिणामी प्रेरणेनें एका ल, ठिकाणीं कार्य केलें तरी परिणाम एकच होणार आहे.

जर चोहोंहून जास्त प्रेरणा असल्या तरी वर सांगितल्या प्रमाणें कृति करीत गेलें म्हणजे त्या सर्वांचा मध्य काढितां येईल.

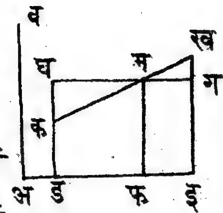
$प_१$ $प_२$ $प_३$ $प_४$ इत्यादि प्रेरणांच्या ज्या आतां दिशा आहेत त्यांहून अन्य दिशा असल्या तरी जोंपर्यंत त्या सर्व परस्पर समांतर आहेत तोंपर्यंत सर्व कृति वरच्या प्रमाणें कायम राहून तोच मध्य निघेल.

जर पदार्थ वांकडा फिरविला तर टिंबांच्या रेघांनीं त्या प्रेरणा कार्य करतील. पदार्थास नव्या स्थितींत ठेविल्यानें प्रेरणांच्या दिशा मात्र बदलल्या. यास्तव वर सांगितल्या प्रमाणें जोंपर्यंत त्यांचीं परिमाणें कायम आहेत, तोंपर्यंत वरील कृतीच लागू पडेल, व मध्य कायम राहील; यास्तव जर $प_१$ $प_२$ $प_३$ $प_४$ या समांतर प्रेरणा क, ख, ग, घ या बिंदुस्थळीं दृढ पदार्थावर कार्य करीत असतील तर पदार्थास कोणत्याही स्थितींत ठेविलें, किंवा प्रेरणांच्या कार्य करण्याच्या दिशा कशाही असल्या तरीं त्यांचीं परिमाणें व कार्य दर्शक बिंदू कायम आहेत तोंपर्यंत त्यांचा मध्य ल च असेल. जर समांतर प्रेरणांपैकीं कांहीं उलट दिशांनीं कार्य करीत असतील तर विजातीय प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणांचे कार्य करण्याचे मध्य बिंदु त्यांची स्थळें बदलतील, बाकी कृति सर्व अशीच

असेल; परंतु कांहीं एका दिशेनें व कांहीं उलट दिशेनें कार्य करणाऱ्या अनेक समांतर प्रेरणा असतील, तर त्यांचे दोन गण करावे, आणि प्रत्येक गणाचा, मध्य व त्यांची परिणामी प्रेरणा काढावी. जर एका गणाची परिणामी प्रेरणा दुसऱ्याच्या परिणामी प्रेरणेबरोबर असेल आणि दोहोंचे मध्य एकाच बिंदुस्थळीं येतील, तर त्या सर्व प्रेरणा समतोल असतील, जर परिणामी प्रेरणा बरोबर असतील आणि मध्य भिन्नभिन्न ठिकाणीं असतील आणि त्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा **प्रेरणायुग्म** होईल; जर परिणामी प्रेरणा बरोबर नसतील, तर त्या दोहोंची परिणामी प्रेरणा व मध्य काढावा. तो सर्व प्रेरणांचा मध्य होईल.

(७,६) वर सांगितल्या प्रमाणें भूमितीनें कृति करून अनेक प्रेरणांचा मध्य कसा काढावा हें सांगितलें. परंतु प्रत्येक वेळीं इतकी कृति करून मध्य काढणें म्हणजे फारवेळ लागेल. याकरितां प्रेरणांची परिमाणें व त्यांचें कार्य करण्याचे बिंदु हे दिले, म्हणजे त्यांवरून गणित करून एकदम मध्य काढितां येण्याजोगी सारणी काढूं. कोणत्याही बिंदूचें ठाम स्थळ समजण्यास परस्पर मिळणाऱ्या अशा दोन रेषांपासून त्याचीं अंतरें समजलीं पाहिजेत. मग तीं अंतरें लंब मोजलीं किंवा त्या रेषांशीं समांतर मोजिलीं तरीं चालतील. यास्तव प्रेरणा ज्या बिंदूंत कार्य करितात ते बिंदु देणें म्हणजे त्यांचीं विवक्षित रेषांपासून अंतरें देणें होय.

(७,७) दोन समांतर प्रेरणांच्या कार्यदर्शक बिंदूंचीं अंतरें दोन विवक्षित रेषांपासून दिलीं असल्यास त्यांच्या मध्याचीं त्यांपासून अंतरें काढणें.



प$_{२}$ आणि **प**$_{२}$ या दोन समांतर प्रेरणा **क** व **ख** या बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत; **क**, **ख** या बिंदूंचीं **अभ** रेषेपासून **अब** शीं समांतर अशीं **त**$_{१}$, **त**$_{२}$ अंतरें दिलीं आहेत. तर त्यांच्या मध्याचें **अभ** रेषेपासून **अब** शीं समांतर अंतर काढणें आहे. असें स-

मजूं कीं, $प_१$ आणि $प_२$ यांची परिणामी प्रेरणा $प_१ + प_२$, क, ख, बिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेंत म ठिकाणीं कार्य करिते तर-

$$\frac{प_१}{प_२} = \frac{खम}{कम}.$$

आतां म चें अंतर अ भ, पासून काढणें आहे. क, ख आणि म पासून अ बशीं समांतर अशा रेषा काढ. त्या अ भ, रेषेस ड, इ, फ स्थळीं मिळतात. म बिंदूतून अ, भशीं समांतर रेषा काढ. ती कड आणि ख ई, यांस घ आणि ग या स्थळीं मिळते.

$कड = त_१$, $खई = त_२$ तर $मफ = क्ष$ काढणें. कघम आणि खगम, हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{खम}{कम} = \frac{खग}{कघ}. \quad (यु \cdot पु \cdot ६ \ सि \cdot ४)$$

$$\therefore \frac{प_१}{प_२} = \frac{खम}{कम} = \frac{खग}{कघ} = \frac{खई - गई.}{घड. - कड.}$$

$$घड = मफ = गइ = क्ष.$$

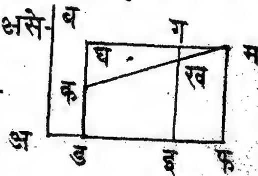
$$\therefore \frac{प_१}{प_२} = \frac{त_२ - क्ष.}{क्ष - त_१};$$

$$प_१ (क्ष - त_१) = प_२ (त_२ - क्ष)$$

$$(प_१ + प_२) क्ष = प_१ त_१ + प_२ त_२$$

$$क्ष = \frac{प_१ त_१ + प_२ त_२}{प_१ + प_२}$$

आतां जर $प_१, प_२$ प्रेरणा विरुद्ध दिशांनीं क, ख, बिंदुस्थळीं कार्य करीत असतील. आणि ख ठिकाणची $प_२$ मोठी असेल, तर त्यांचा मध्य क ख च्या बाहेर पडेल. वर सांगितल्या प्रमाणें सर्व कृति करावी.



$$\frac{प_1}{प_2} = \frac{खम}{कम} = \frac{खग}{कघ} = \frac{गइ - खइ}{घड - कड} = \frac{क्ष - त_2}{क्ष - त_1}$$

$$\therefore प_1 (क्ष - त_1) = प_2 (क्ष - त_2)$$

$$\therefore प_2 त_2 - प_1 त_1 = क्ष (प_2 - प_1)$$

$$\therefore क्ष = \frac{प_2 त_2 - प_1 त_1}{प_2 - प_1}$$

दोन प्रेरणा विरुद्ध दिशांनीं कार्य करीत असल्या म्हणजे एकीस 'धन' तर दुसरीस 'ऋण' म्हणतात. जी मोठी असेल ती धन आणि लहान ऋण धरितात. यास्तव पहिल्या सारणींत $प_1$ याच्या ठिकाणीं $प_1$ ही किंमत लिहिली, तरी ही सारणी येते. यास्तव प्रथम काढलेलीच सारणी कायमची समजून पाठ करावी.

जर $क_1$, $ख_1$ बिंदूंचीअब रेषेपासून अभ शीं समांतर अंतरें $थ_1$, $थ_2$ दिलीं असलीं, आणि म मध्याचें तिजपासून अंतर य काढणें असल्यास सर्व कृति अशीच होईल. आणि य ची किंमत अशी निघेल.

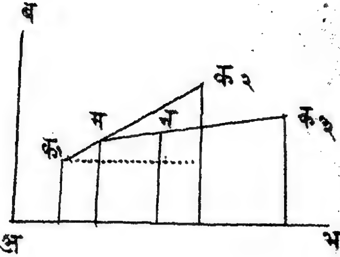
$$य = \frac{प_1 थ_1 + प_2 थ_2}{प_1 + प_2}.$$

या प्रमाणें म बिंदूचीं दोन्हीं रेषांपासूनचीं अंतरें समजतात, व त्यांवरून एकदम त्याचें ग्रामस्थळ कळतें. जर अब, अभ, रेषा परस्पर लंब असतील तर अंतरें लंब असतील. जेव्हां एकाच रेषेपासून मोघम अंतर दिलें असेल तेव्हां तें लंब असें समजावें.

(७८) अनेक प्रेरणांच्या कार्य करण्याच्या बिंदूचीं विवक्षित रेषांपासून अंतरें दिलीं असल्यास त्यांच्या मध्याचीं त्यांपासूनचीं अंतरें काढणें.

समजा कीं, $प_1$ $प_2$ $प_3$ $प_4$ इत्यादि अनेक प्रेरणा $क_1$, $क_2$, $क_3$, $क_4$ इत्यादि बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत. त्यांचीं अभ रेषेपासून अबशीं समांतर अंतरें $त_1$, $त_2$, $त_3$, $त_4$ इत्यादि दिलीं

आहेत. अब, अभ रेषा आणि क,क२ इत्यादि बिंदु एकाच पातळींत आहेत.



वरील कलमा प्रमाणें क१,क२ सांधून प१ व प२ यांच्या म मध्याचें क्ष१ अंतर काढ.

$$क्ष_1 = \frac{प_1 त_1 + प_2 त_2}{प_1 + प_2}$$

आतां म क३ सांध, आणि म ठिकाणच्या प१ + प२ आणि क३ ठिकाणच्या प३ या दोन प्रेरणांच्या न मध्याचें अंतर क्ष२ काढ. तें असें होईल.

$$क्ष_2 = \frac{(प_1 + प_2) क्ष_1 + प_3 त_3}{प_1 + प_2 + प_3}$$

यांत क्ष१ याची वरील किंमत लिहून.

$$क्ष_2 = \frac{प_1 त_1 + प_2 त_2 + प_3 त_3}{प_1 + प_2 + प_3}$$

आतां न क४ सांधून न ठिकाणच्या प१ + प२ + प३ आणि क४ ठिकाणच्या प४ या दोन प्रेरणांच्या ल मध्याचे क्ष३ अंतर काढ.तें असें होईल.

$$क्ष_3 = \frac{(प_1 + प_2 + प_3) क्ष_2 + प_4 त_4}{प_1 + प_2 + प_3 + प_4}$$

यांत वरील क्ष२ ची किंमत लिहून.

$$क्ष_3 = \frac{प_1 त_1 + प_2 त_2 + प_3 त_3 + प_4 त_4}{प_1 + प_2 + प_3 + प_4}$$

या प्रमाणे चार समांतर प्रेरणांच्या मध्याचें अभ पासूनचें अंतर निघालें. अशा अनेक प्रेरणा असल्या तरी सारणी अशीच

येईल. यास्तव साधारण सारणी अशी होईल.

$$क्ष = \frac{प_1 त_1 + प_2 त_2 + प_3 त_3 + प_4 त_4 + प_5 त_5 \cdots प_न \ त_न}{प_1 + प_2 + प_3 + प_4 + प_5 \cdots प_न}$$

याच प्रमाणें अ ब, पासूनचीं अंतरें $थ_1, थ_2, थ_3, थ_4$ इत्यादि असतील तर मध्याचें तिजपासून य अंतर असें होईल.

$$क्ष = \frac{प_1 थ_1 + प_2 थ_2 + प_3 थ_3 + प_4 थ_4 \cdots प_न \ थ_न}{प_1 + प_2 + प_3 + प_4 \cdots\cdots प_न}.$$

उदाहरणें.

(१) २० शेर आणि ३० शेर जोराच्या दोन समांतर प्रेरणा एकाच दिशेनें दृढपदार्थावर कार्य करीत आहे. त्यांच्या कार्य करण्याच्या दोहों बिंदूंमधील अंतर ७ इंच आहे. तर त्याची परिणामी प्रेरणा प्रेरणा व तिच्या कार्यकरण्याच्याबिंदूचें पहिल्या प्रेरणेच्या बिंदूपासून अंतर काढ?

उ॰ ५० शेर, अंतर ३ इंच.

(२) ३ शेर व पांचशेर जोराच्या समांतर प्रेरणा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करीत आहेत. त्यांच्या कार्य करण्याच्या बिंदूंमधील अंतर १२ इंच आहे. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा व तिच्या कार्य करण्याच्या बिंदूचें पहिलीच्या बिंदूपासून अंतर काढ.

उ॰ २ शेर. अंतर ३० इंच.

(३) अबकड हा चौरस आहे. ३ शेरांची प्रेरणा अ पासूनब कडे, ४ शेरांची ब पासून क कडे, ६ शेरांची ड पासून क कडे आणि ५ शेरांचीअ पासून डकडे अशा कार्य करितात. तर त्यांच्या परिणामी प्रेरणेचें परिमाण व तिची दिशा काढ.

उ॰ ९√२ शेर. तिची दिशाअक कर्णाशीं समांतर असेल आणि तीअड स अ पासून ⅔ अड अंतरावर छेदील.

(४) प, २प, ३प, ४प, प्रेरणा चौरसाच्या बाजूंनीं क्रमानें कार्य करितात. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ?

उ. २ प √२.

(५) ४ फूट लांबीची तुळी परस्परांमध्यें ३ फूट अंतर आहे अशा दोन टेंकूंवर क्षितिजाच्या पातळींत तोलून ठेवलेली आहे. एक टेंकू एका शेवटाकडे आहे. तर असें सिद्ध करकीं, तिच्या एका टेंकूवरचा दाब दुसऱ्या वरील दाबाच्या दुप्पट आहे.

(६) जिची दांडी ४० इंच लांब आहे अशी कावड एक मनुष्य खांद्यावरून नेत आहे. एका पारड्यांत दुसऱ्याच्या $\frac{२}{३}$ वजन आहे. कोणत्या ठिकाणीं त्याणें कावड खांद्यावर घेतली पाहिजे. कावडीचें वजन हिशेबांत धरावयाचें नाहीं.

उ. जड वजनापासून १६ इंचावर.

(७) १, २, ३, ४ शेरांच्या चार प्रेरणा एका दांड्यावर सारख्या अंतरावर दांड्याशीं लंब दिशेंत कार्य करीत आहेत. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ?

उ. प्रेरणा समतोल असतील.

(८) अब हा १५ फूट लांबीचा गुरुत्व शून्य असा दांडा आहे. अपाशीं ४ पौंडांचें वजन टांगिलें आहे. तेथून ३ फुटांवर १ पौंडाचें टांगिलें आहे; आणि ब पासून ८ फुटांवर ११ पौंडांची प्रेरणा वरच्या बाजूस लंब दिशेनें ओढीत आहे; तर दांडा समतोल राहण्यास आणखी किती व कोठें वजन टांगिलें पाहिजे.

उ. ६ पौंड, बपासून २ फूट ८ इंचांवर.

(९) समांतरभुज चौकोनाच्या दोन कोन बिंदूंवर क, ख दोन समांतर प्रेरणा कार्य करितात, तर दुसऱ्या दोन बिंदूंवर याशीं समांतर अशा कोणत्या दोन प्रेरणांनीं कार्य करावें, म्हणजे चारी प्रेरणांचा मध्य कर्णाचा छेदनबिंदु होईल.

उ॰ क,ख प्रेरणा.

(१०) समभुज षट्कोनाकृतीच्या कोनबिंदूंवर सहा सारख्या समांतर प्रेरणा कार्य करितात. त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ?

उ॰ षट्कोनाकृतीच्या मध्यापासून बाजूच्या हे अंतरावर.

(११) वर्तुळाच्या परीघाचे न सारखे भाग केले आहेत. एकाशिवाय करून बाकी विभागणाऱ्या बिंदूंवर सारख्या समांतर प्रेरणा कार्य करितात. तर त्यांचा मध्य काढ.

उ॰ मध्य बिंदूपासून त्रिज्येच्या $\frac{1}{न-१}$ अंतरावर

(१२) प,फ,भ या समांतर प्रेरणा अबक त्रिकोणाच्या कोनबिंदूंवर कार्य करितात. तर बाजूंच्या मध्यावर कोणत्या प्रेरणांनीं कार्य करावें म्हणजे दोहों जोडांचें मध्य व परिणामी प्रेरणा एकत्र होतील.

(१३) जर प,फ,भ ह्या समांतर प्रेरणा अबक त्रिकोणाच्या कोनबिंदूंवर कार्य करितील आणि त्यांचा न हा मध्य असेल तर असें सिद्ध करकीं,

$$\frac{प}{\triangle बनकचें क्षेत्र} = \frac{फ}{\triangle कनअचें क्षेत्र} = \frac{भ}{\triangle अनब}.$$

प्रकरण ५

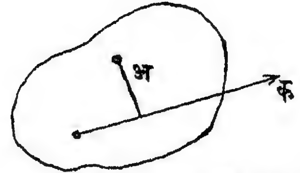
भ्रामकत्व.

ज्या प्रेरणा पदार्थास सरळ रेषेंत एका बिंदूपासून प्रत्यक्ष ओढितात किंवा ओढण्याचा त्यांचा कल असतो त्यांविषयीं विवेचन केलें. आतां ज्या प्रेरणांच्या आंगीं एका स्थिर बिंदू सभोंवती गति देण्याचा म्हणजे भ्रमण उत्पन्न करण्याचा कल असतो त्यांविषयीं विचार करूं.

एकाद्या पदार्थाचे एका स्थिर बिंदु भोंवती भ्रमण करविण्याची जी प्रेरणेच्या आंगीं शक्ति असते, तिला त्या प्रेरणेचें त्या बिंदुसंबंधीं **भ्रामकत्व** असें म्हणावें.

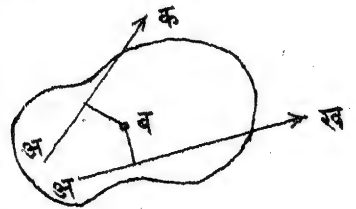
जर पदार्थ एका स्थिर बिंदूशीं पक्का जोडलेला असला किंवा तो बिंदु त्या पदार्थांत असला व त्या सभोंवती फिरण्याजोगा असला, तर पदार्थ स्थिर बिंदूशीं पक्का जोडलेला असल्यामुळें सरळ रेषेंत ओढणारी प्रेरणा त्यास लाविली तरी तिच्या योगानें तो पदार्थ त्या बिंदु सभोंवती मात्र फिरेल. याचीं उदाहरणें व्यवहारांत अनेक आढळतात. पाणी काढण्याचा रहाट आंसा भोंवती गरगरा फिरतो; तेव्हां त्यास सरळ रेषेंत गति देणारीच मूळची प्रेरणा असते. ज्या दांड्यास गति देतों, तो दांडा आंसाशीं जोडला असल्यानें त्यास भ्रामक गति येते. सूत काढण्याचा रहाट, उंसाचा घाणा, तेलाचा घाणा वगैरे हीं उदाहरणें भ्रामक गतीचीं होत. विवक्षित प्रेरणेचीही भ्रामकगति उत्पन्न करण्याची शक्ति दोन गोष्टींवर अवलंबून राहील. ज्या प्रमाणें स्थिर बिंदूचें अंतर प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेपासून जास्त कमी असेल, त्या प्रमाणें जास्त किंवा कमी अवकाशांतून भ्रमण होईल. हें अंतर म्हणजे प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेवर स्थि-

र बिंदूपासून काढलेला लंब होय. हा लंब जसा मोठा तसा भ्रमणावकाश मोठा होईल. लंब जसा लहान होत जाईल, त्याप्रमाणें कमी अवकाशांतून भ्रमण होईल. कमी होत होत जर प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेंतच स्थिर बिंदु असला, तर भ्रमणास मुळींच अवकाश मिळणार नाहीं; व पदार्थास भ्रामकगति न मिळतां, सरळ रेषेंत मिळेल. तसेंच ज्या प्रमाणें प्रेरणा जास्त जोराची असेल, त्या मानानें भ्रमण जास्त कमी वेगानें घडेल. यास्तव विवक्षित प्रेरणेचें **भ्रामकत्व** प्रेरणा व तिच्या कार्यदर्शक रेषेवरील लंब या दोहोंवर अवलंबून असतें. म्हणून या दोहोंच्या गुणाकारास त्या प्रेरणेचें विवक्षित बिंदू भोंवतालचें भ्रामकत्व असें म्हणतात. व याच अर्थी भ्रामकत्व या पारिभाषिक शब्दाचा पुढें उपयोग केला जाईल. जर **क** ही विवक्षित प्रेरणा असेल, आणि अ तिचें विवक्षित बिंदूपासून अंतर असेल तर-

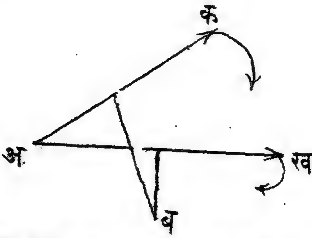


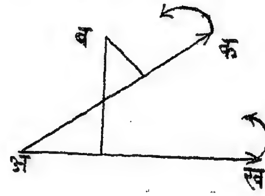
कचें त्या बिंदुविषयीं भ्रामकत्व = **क** × अ.

(५९) भ्रमण डावीकडून उजवीकडे किंवा उजवीकडून डावीकडे असें दोन रीतींनीं होऊं शकेल. यास्तव प्रेरणेचें याप्रमाणें भ्रामकत्वही दोन प्रकारचें मानलें पाहिजे. उजवीकडून डावीकडे घड्याळ्याच्या कांट्याप्रमाणें भ्रमण घडत असल्यास त्यास **धन-भ्रामकत्व** आणि त्याच्या उलट भ्रमण घडत असल्यास त्यास **ऋण भ्रामकत्व** असें म्हणावें. उदाहरणार्थ जर **क** आणि **ख** या प्रेरणा **अक** आणि **अख** या दोन रेषा दर्शवितील, आणि **ब** स्थिर बिंदु दोहोंच्या मध्यें असेल तर; **अक** प्रेरणेनें **ब** भोंवती घड्याळाच्या कांट्याप्रमाणें आणि **अख** नें त्याच्याउ-



लट होईल. ज्यापेक्षां ब बिंदुसभोंवती भ्रमण होणें आहे त्यापेक्षां अक नें उजवीकडून डावीकडे आणि अख नें त्याच्या उलटच भ्रमण झालें पाहिजे. जर अकचें भ्रामकत्व धन धरिलें, तर अख चें ऋण होईल; परंतु जर ब बिंदु मध्यें नसतां बाहेर असेल तर दोहोंचें भ्रामकत्व एकाच जातीचें होईल. जर ब बिंदु अख रेषेच्या खालीं असेल, तर दोहोंचे भ्रामकत्व धन आणि

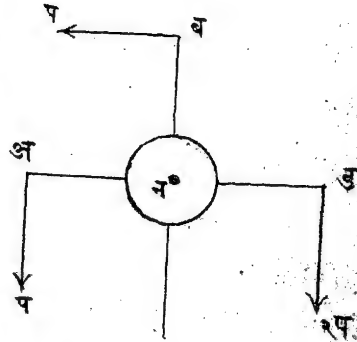




जर अकच्या वर ब बिंदु असला, तर दोहोंचें ऋण होईल.

भ्रामकत्वाविषयीं चांगली कल्पना येण्याकरितां आणखी एक उदाहरण घेऊन स्पष्ट करितों.

मध्यावर फिरत्या अशा न चाकाच्या परिघांत सारख्या लांबीचे कांहीं दांडे गच्च बसविले आहेत.



यां पैकीं कोणत्याही दांड्याच्या शेवटास त्याशीं लंब दिशेनें कार्य करणारी प प्रेरणा लाविली तर चाकाचें भ्रमण सारखेंच होईल.

जर अ आणि ब या दोहों दांड्यांस प आणि प या दोन समान प्रेरणा लाविल्या, तर या प्रेरणांच्या कार्यानें चाक न फिरतां स्थिर राहण्यास दुसऱ्या एका ड दांड्यास प१ प्रेरणा चाकास डावीकडून उजवीकडे फिरविणारी प्रेरणा लावावी लागेल.

यावरून हें स्पष्ट आहे कीं ड च्या शेवटास लाविलेल्या २प प्रे-

रणेची भ्रामकशक्ति त्याच ठिकाणी त्याच दिशेनें कार्य करणाऱ्या प्रेरणेच्या दुप्पट असेल. म्हणून भ्रामकशक्ति प्रेरणेच्या परिमाणाच्या प्रमाणांत असते हें उघड आहे. तसेंच डु दांड्याची लांबी जास्त असेल तर जास्त अवकाशांतून भ्रमण होईल. म्हणून कोणत्याही प्रेरणेची भ्रामकशक्ति म्हणजे तिचें भ्रामकत्व प्रेरणेचें परिमाण आणि तिच्या कार्यदर्शक रेषेवर स्थिरबिंदूपासून काढलेला लंब यांवर अवलंबून असते, हें उघड आहे.

जर डु दांड्यास लंब दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा न लाविता डुग दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा लाविली तर तीच लंब दिशेनें कार्य करील तर जेवढी तिच्या अंगीं भ्रामकशक्ति असेल तेवढी आतां असणार नाहीं. वास्तविक तिची भ्रामकशक्ति तिच्या कार्यदर्शक रेषेवर न स्थिरबिंदुपासून काढलेला लंब आणि प्रेरणा यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे. म्हणजे ग × नम आहे. परंतु ग प्रेरणा जर ड दांड्यासच लाविली असेल तर गचे दांड्याच्या दिशेंत व त्याशीं लंब अशा डक आणि डख या प्रेरणांत पृथक्करण करावें. पदार्थ न भोंवती मात्र फिरता असल्यानें तो डक दिशेनें सरणार नाहीं, आणि डख नेंमात्र न भोंवतीं फिरेल.

डख = ग· कों· भु· (गडख)

डख· नड = ग· नड· कों· भु· (गडख)

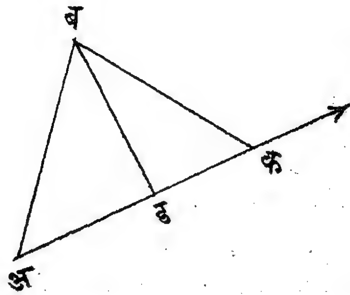
∠गडख = ∠डनम ∴ नम = नड· कों· भु· (गडख)

ग × नम = ग × नड· कों· भु (गडख) = नड × डख.

विवक्षित प्रेरणेनें पदार्थाचें एका स्थिरबिंदूभोंवती भ्रमण हो-

ण्यास तो बिंदु पदार्थांत असून त्या सभोंवती फिरता असला पाहिजे. किंवा तो बिंदु पदार्थाबाहेर असल्यास प्रेरणेच्या दिशेशीं लंब अशा दृढ दांड्यानें तो बिंदु पदार्थास जोडलेला असला पाहिजे. जर बिंदु व पदार्थ यांस जोडणाऱ्या दृढ दांड्याशीं लंब दिशेनें प्रेरणा कार्य करीत नसली तर दांड्याशीं लंब असा जो पृथग्भूत भाग असेल तेवढ्यानें मात्र भ्रमण घडेल. असा जरी वास्तविक प्रकार आहे तरी विवक्षित प्रेरणेची विवक्षित बिंदु संबंधीं भ्रामकशक्ति काढण्यास तो बिंदु वास्तवीक प्रेरणेच्या दिशेशीं लंब अशा दृढ दांड्यानें पदार्थाशीं जोडलेला आहे किंवा नाहीं याचा विचार न करितां स्थिर बिंदूपासून प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेवर लंब काढून त्या लंबानें स्थिरबिंदु पदार्थाशीं जोडलेला आहे अशी कल्पना करून प्रेरणेची भ्रामकशक्ति काढितात. म्हणून एखाद्या प्रेरणेचें एका विवक्षित बिंदु संबंधीं भ्रामकत्व म्हणजे तिची भ्रामकशक्ति केवळ प्रेरणा आणि तिच्या कार्यदर्शक रेषेवर काढलेला लंब यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें एवढेंच घेऊन यंत्रस्थिति शास्त्रांतील अनेक सिद्धांत सिद्ध केले आहेत.

(६०) विवक्षित बिंदूसंबंधीं विवक्षित प्रेरणेचें भ्रामकत्व भूमितीनें कसें दाखवितां येतें तें सांगतो.

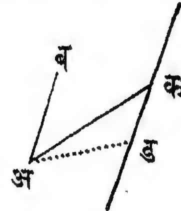


अक रेषा क प्रेरणा परिमाणानें व दिशेनें दर्शवीत आहे. ब हा स्थिरबिंदु आहे. ब पासून अक वर बड लंब काढिला म्हणजे क प्रेरणेचें ब संबंधीं भ्रामकत्व अक × बड होईल. आतां जर अब आणि बक सांधिल्यास अबक हा त्रिकोण होईल. या त्रि-

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ $\frac{अक \times बड}{२}$ आहे. यास्तव याची दुप्पट अक × बड आहे. म्हणून अ ब क त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुपटी बरोबर क प्रेरणेचें ब संबंधीं भ्रामकत्व आहे. या करितां हें स्पष्ट आहे कीं, प्रेरणेचें परिमाण व दिशा दर्शविणारी रेषा ज्याचा पाया आहे व स्थिर बिंदु ज्याचा शिरकोन आहे अशा त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुपटी बरोबर त्या प्रेरणेचें त्या बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व असतें

(६१) प्रेरणा ज्या बिंदुस्थळीं कार्य करीत असेल तो बिंदु दिलेल्या स्थिर बिंदूशीं सांधिला आणि प्रेरणा दर्शक रेषेच्या दुसऱ्या टोंकापासून या रेषेशीं समांतर रेषा काढिली आणि इजमध्यें कोणताही बिंदु घेऊन तो प्रेरणा ज्या बिंदूवर कार्य करिते त्या बिंदूशीं सांधिला, तर या रेषेनें जी प्रेरणा दर्शविली जाईल, तिच्या दिलेल्या बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर मूळच्या प्रेरणेचें त्या बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व असतें.

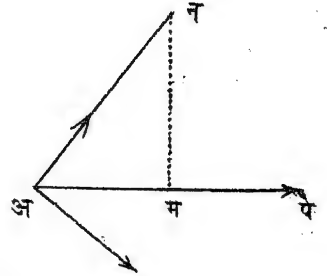
अक रेषा अ बिंदूवर कार्य करणारी प्रेरणा दर्शविते आणि ब हा दिलेला बिंदु आहे, अ ब सांधून अक रेषेच्या दुसऱ्या क टोंकांतून अ ब शीं एक समांतर रेषा काढिली आणि तींत कोठेंही ड बिंदु घेतला आणि अ, ड सांधिले तर अ ड रेषेनें दर्शविणाऱ्या प्रेरणेचें ब संबंधीं भ्रामकत्व अ क च्या ब संबंधीं भ्रामकत्वाबरोबर असतें. कारण अ ब क आणि अ ब ड हे त्रिकोण अ क आणि अ ड यांचीं बिंदुसंबंधीं भ्रामकत्वें दर्शवितात. हे त्रिकोण अ ब या एकाच पायावर आणि अ ब आणि क ड या समांतर रेषांमध्यें आहेत म्हणून (यु. पु. १ सिद्धांत ३५) ते परस्पर बरोबर आहेत.



(६२) विवक्षित प्रेरणेचें दिलेल्या बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व, प्रेरणा ज्या बिंदुस्थळीं कार्य करिते तो बिंदु व दिलेला बिंदु हे हे सांधून त्या रेषेशीं लंब दिशेंत जो दिलेल्या प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग त्याच्या भ्रामकत्वा

बरोबर असतें.

समजा कीं, प प्रेरणा अ बिंदुस्थळीं अप दिशेनें कार्यकरीत आहे, न हा दिलेला बिंदु आहे. न अ सांध आणि नम, पच्या कार्यदर्शक रेषेवर लंब काढ. म्हणून प चें भ्रामकत्व = प× नम. समजा कीं, ∠न अम = ७



प प्रेरणेचा अन शीं लंब अशा दिशेनें कार्य करणारा पृथग्भूत भाग प× भु (७) होईल.

प·भु·(७) या प्रेरणेच्या कार्यदर्शकरेषेवरील न बिंदुपासून काढलेला लंब न अ आहे.

∴ न संबंधीं प·भु (७) चें भ्रामकत्व = प·भु· (७)× न अ

परंतु न अ· भु· (७) = नम.

∴ न संबंधीं प भु (७) चें भ्रामकत्व = प× नम

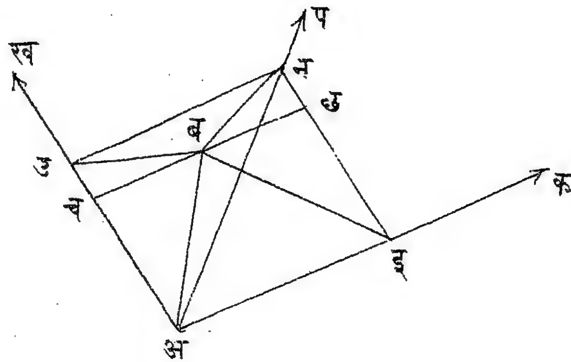
हें उघड आहे कीं, हीं भ्रामकत्वें एकाच जातीचीं म्हणजे एकाच दिशेनें भ्रमण करविणारीं आहेत.

(६,३) एका पातळींत कार्य करणाऱ्या व एका बिंदूंत मिळणाऱ्या अशा दोन प्रेरणांच्या एका विवक्षित बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्या बिंदु सभोंवतालच्या भ्रामकत्वाबरोबर असते.

या सिद्धांताचे दोन प्रकार होतील. (१) स्थिरबिंदु दोहों प्रेरणांच्या मध्यें असेल. (२) किंवा तो दोहोंच्या बाहेर असेल. पहिल्यावेळीं दोहोंचीं भ्रामकत्वें विजातीय होतील; आणि त्यांची बेरीज वस्तुतः त्यांची वजावाकी असेल; दुसऱ्यावेळीं दोहोंचीं भ्रामकत्वें सजातीय असतील.

(१) अइ, अउ रेषा क,ख प्रेरणा दर्शवितात. अ इ, न उ

हा समांतर भुज चौकोन काढ आणि अन सांध; म्हणजे क, ख यांची परिणामी प्रेरणा प, अन कर्ण दर्शवील. ब बिंदु दोहोंच्या मध्यें घेऊं. अबउ, अबई. आणि अबन या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या दुपटी अउ, अई आणि अन यांचीं भ्रामकलें दर्शवितील. अइ व अउ



चीं भ्रामकलें विजातीय आहेत. म्हणून २△ अबइ− २△ अबउ= २△ अबन हें सिद्ध करावयाचें आहे.

ब मधून अइशीं समांतर अशी चबछ रेषा काढ.

▱ इच=▱ इउ−▱ छउ.

▱ इच=२△अबई;▱ इउ= २△ अउन;▱ छउ= २△उबन.

∴ △ अबइ= △ अउन− △ उबन

परंतु △ अउन= △ अबउ+ △ अबन+ △ उबन.

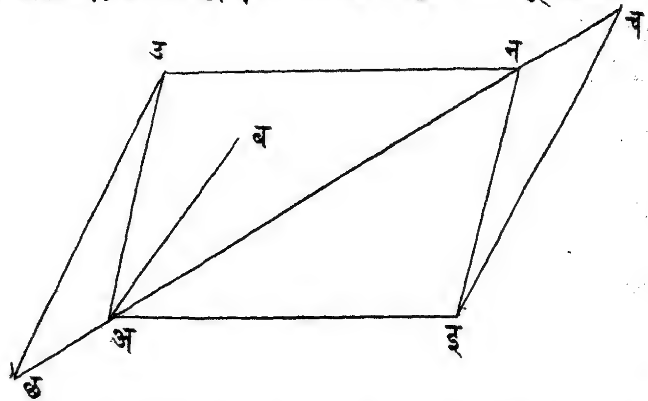
∴ △ अबइ= △ अबउ+ △ अबन.

∴ △ अबइ− △ अबउ= △ अबन.

या समीकरणास दोहोंनीं गुणिलें तरी खरें आहे, म्हणून सिद्धांत सिद्ध झाला.

हाच सिद्धांत कलम (६१) यांत सांगितल्या नियमानेंही सिद्ध करितां येतो.

ब बिंदु अशीं सांधून अबशीं इ व उ या बिंदूंतून समांतर रेषा काढाव्या. आणि अन तिला च व छ या बिंदूंत उछ व उ-



च मिळेपर्यंत वाढवावी म्हणजे अइचें भ्रामकत्व अचच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. आणि अउचें भ्रामकत्व अछच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. म्हणुन अइ आणि अउ यांच्या भ्रामकत्वाच्या बजाबाकी बरोबर अच आणि अछ यांच्या भ्रामकत्वाची वजाबाकी होईल. नच = अछ, कारण अछउ आणि इनच हे दोन त्रिकोण समान आहेत. अउ = नइ; ∠छ = ∠च, ∠उअछ = ∠इनच, यास्तव अच − अछ = अन + नच − अछ = अन. यास्तव अइ व अउ यांच्या भ्रामकत्वाच्या वजाबाकी बरोबर अनचें भ्रामकत्व आहे हें सिद्ध झालें.

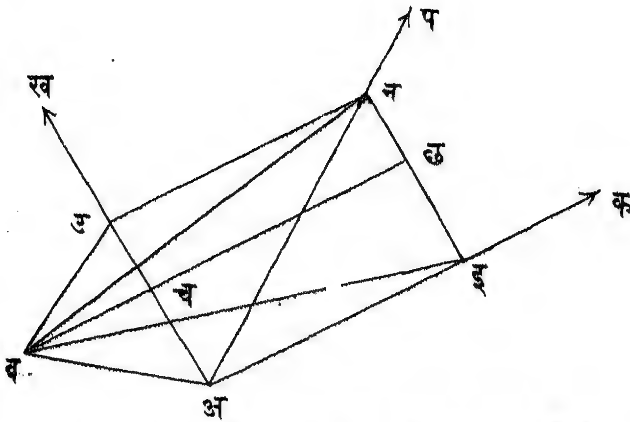
क॰ ६२ यांत सांगितल्या नियमानें तर हा सिद्धांत फारच सहज रीतीनें सिद्ध होतो.

क॰ ४० प्रमाणें एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या कोणत्याही दिशेंतील पृथग्भूत भागांच्या बेरजे बरोबर त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्या दिशेंतील पृथग्भूत भाग असतो. म्हणून बअ शीं लंब दिशेंतील अइ, अउ यांच्या पृथग्भूत भागांबरोबर त्या दिशेंतील अनचा पृथग्भूत भाग असेल.

आतां क. ६२ प्रमाणें अइ, अउ यांची ब संबंधीं भ्रामकत्वें त्यांच्या ब अ शीं लंब दिशेंतील पृथग्भूत भागांच्या भ्रामकत्वा बरोबर आहेत. यांचीं ब संबंधीं भ्रामकत्वें म्हणजे ब अ × पृथग्भूत भाग. आणि हे पृथग्भूत भाग अन च्या पृथग्भूत भागाबरोबर आहेत. म्हणून ब अ × अन-चा पृथग्भूत भाग याबरोबर अइ व अउ यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज होईल; परंतु ब अ × अन चा पृथग्भूत भाग = अनचें ब संबंधीं भ्रामकत्व आहे. म्हणून सिद्धांत सिद्ध झाला.

अइ व अउ यांचे पृथग्भूत भाग धन व ऋण असतील म्हणून त्यांचीं भ्रामकत्वें धन व ऋण होतील. त्यांची बेरीज ही त्यांची वजाबाकी असते.

(२) जेव्हां ब बिंदु अइ, अउ यांच्या बाहेर असेल तेव्हां सिद्धांत सिद्ध करूं. यावेळीं दोहों प्रेरणांचीं भ्रामकत्वें सजातीय असतील.



अइ चें भ्रा. + अउचें भ्रा. = अनचें भ्रा. किंवा.

२ △ अबइ + २ △ अबउ = २ △ अबन.

हें सिद्ध करावयाचें आहे.

ब मधून बचछ, अइ शीं समांतर काढ.

△ अबन = चौकोन अबउन — △ बउन.

परंतु चौकोन अबउन = △ अबउ + △ अउन.

ही किंमत वरच्या समीकरणांत लिहून व समीकरणास २नीं गुणून.

२△ अबन = २△ अबउ + २△ अउन − २ △ बउन.

२△ अउन = ▱ उइ.

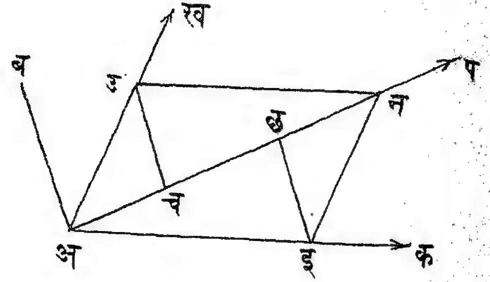
२ बउन = ▱ उछ.

∴ २△ अबन = २△ अबउ + ▱ उइ + ▱ उछ.

परंतु ▱ उइ − ▱ उछ = ▱ चइ = २△ अबई.

हा तर दुसऱ्या रीतीनें फारच सहज सिद्ध होतो.

ब बिंदु अ शीं सांधून अब शीं उ व इ या दुसऱ्या टोंकांतून उच व उछ या समांतर रेषा काढ? त्या समांतर रेषांत च, छ हे बिंदु घेऊन ते अ शीं सांधले आहेत म्हणून क. ६१ प्रमाणें.



अउचें भ्रा· = अचचें भ्रा·

अइचें भ्रा· = अछचें भ्रा·

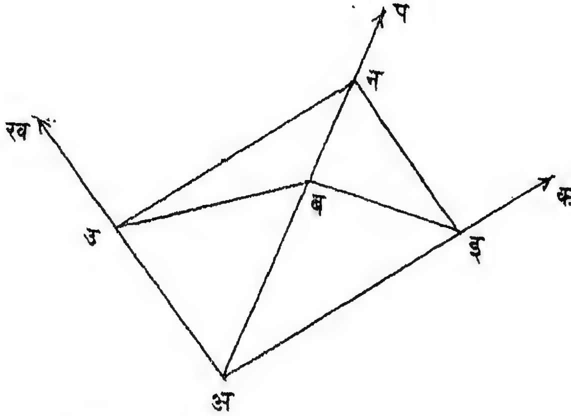
म्हणून अउ भ्रा· + अइचें भ्रा· = अचचें भ्रा· + अछचें भ्रा; △ अउच = △ इछन ∴ अच = छन; अच भ्रा· = छन भ्रा· यास्तव.

अउ भ्रा· + अइ भ्रा· = छन भ्रा· + अछ भ्रा· = अन भ्रा·

टीप— जेव्हां स्थिरबिंदु परिणामी प्रेरणा दर्शक रेषेंत असेल तेव्हां दोहोंच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल.

ब बिंदु अन रेषेंत असेल तर दोहोंचीं भ्रामकत्वें विजातीय असतील. यास्तव त्यांची बेरीज शून्य होण्यास दोनही बरोब-

र आहेत हें सिद्ध केलें पाहिजे.



△ अउन = △ अइन.

$$\frac{\triangle \text{अउन}}{\triangle \text{अइन}} = \frac{\triangle \text{अबउ}}{\triangle \text{अबइ}} \therefore \triangle \text{अबइ} = \triangle \text{अबउ}.$$

यांच्या दुप्पट अइ व अउ यांचीं भ्रामकतें आहेत. याकरितां स्थिर बिंदु जर परिणामी प्रेरणेच्या दिशेंत घेतला तर, दोहोंची समान व विजातीय भ्रामकतें परस्पर समतोल होतील आणि त्यांच्या योगानें त्या बिंदु भोंवती भ्रमण घडणार नाहीं.

(६४) जर दोन प्रेरणा समांतर असल्या तरी फळ्यां वरील सिद्धांत खरा असतो हें दाखवितों.

समांतर प्रेरणा एकाच दिशांस कार्य करितील किंवा परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करितील.

(१) प्रेरणा एकाच दिशेस कार्य करीत आहेत. आणि बिंदु दोहोंच्या बाहेर आहे असें घेऊं. क ख या दोन समांतर प्रेरणा असून त्यांची परिणामी प्रेरणा प आहे ब बिंदु दोहों प्रेरणांचा आहे.

ब पासून प्रेरणांच्या दिशांतून एक लंब रेषा काढ. आणि

ती प्रेरणांस अ क स्थळीं आणि त्याच्या परिणामी प्रेरणेस ड स्थळीं मिळूं दे. क प्रेरणेचे ब पासून अंतर अब आणि ख चे बक आणि प परिणामी प्रेरणेचें बड आहे. दोहोंचे भ्रामकत्व सजातीय आहे म्हणून.

क × अब + ख × बक = प × बड.

हें सिद्ध करावयाचें आहे.

क, ख याची परिणामी प्रेरणा ड मधून जाते.

∴ (क. ४१) क × अड = ख × कड

क × अब + ख × बड = क (बड + अड) + ख (बड − कड)

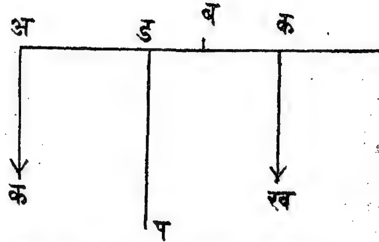
= क × बड + ख × बड.

= (क + ख) बड.

= प (बड)

(२) ब बिंदु दोहोंच्या मध्यें आहे. या वेळीं भ्रामकत्वें विजातीय असतील

(क. ४१) क × अड = ख × कड



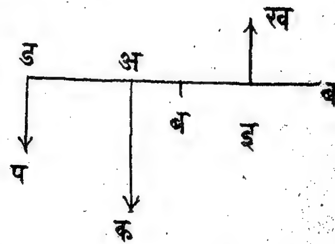
क × अब − ख × बक = क (बड + अड) − ख (कड − बड)

= (क + ख) बड = प. बड.

(३) प्रेरणा परस्पर उलट दिशेनें कार्य करणाऱ्या आहेत. आणि ब बिंदु दोहोंच्या बाहेर आहे.

क, ख याच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा ड बिंदूतून जाते, म्हणून.

क × अड = ख × इड.



दोहोंचें भ्रामकत्व विजातीय आहे म्हणून त्यांची बेरीजही वास्तविक वजाबाकी आहे.

क× बअ — ख· बइ = क (बड — अड) — ख (बड — इड)

= क× बड — ख× बड

= (क — ख) बड = प· बड.

(४) जर ब बिंदु दोहोंच्या मध्यें असेल तेव्हां दोहोंचें भ्रामकत्व सजातीय होईल.

क ×अड = ख×इड.

भ्रामकत्वें सजातीय म्हणून.

क· बअ + ख· बइ = क (बड — अड) + ख (इड — बड)

= क· बड — ख· बड

= (क — ख) बड = प· बड.

यास्तव प्रेरणा समांतर असोत अगर नसोत वरील सिद्धांत सर्वत्र खरा आहे.

टीप- समांतर प्रेरणा असतात तेव्हांही बिंदु परिणामी प्रेरणेच्या दिशेंत घेतल्यास दोहों प्रेरणांचीं भ्रामकत्वें समान आणि विजातीय होऊन त्यांची बेरीज शून्य होते म्हणजे पदार्थ त्या बिंदु भोंवती भ्रमण करणार नाहीं.

(६५) समांतर असणाऱ्या किंवा नसणाऱ्या अशा अनेक प्रेरणा एका पातळींत कार्य करीत असतील, तेव्हां त्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्या बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर होईल.

$क_1$ $क_2$ $क_3$ $क_4$ इत्यादि अनेक प्रेरणा आहेत. आणि $अ_1$ $अ_2$ $अ_3$ $अ_4$ इत्यादि विवक्षित बिंदुपासून त्यांच्या दिशांचीं अंतरें आहेत. आतां जर $क_1$ आणि $क_2$ यांची परिणामी प्रेरणा $प_1$ असेल आणि तिचे ब पासून अंतर $इ_1$ असेल, तर प्रेरणा स-

मांतर असल्या किंवा नसल्या तरी,

$$क_1 अ_1 + क_2 अ_2 = प_1 इ_1$$

$प_2$ ही $प_1$ आणि $क_3$ यांची परिणामी प्रेरणा असली, आणि तिचें ब पासून अंतर $इ_2$ असलें तर.

$$प_1 इ_1 + क_3 अ_3 = प_2 इ_2$$

आणि $\therefore क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 = प_2 इ_2$.

तसेंच जर $प_2$ आणि $क_4$ यांची परिणामी प्रेरणा $प_3$ असली, आणि तिचें ब पासून अंतर $इ_3$ असलें तर.

$$प_2 इ_2 + क_4 अ_4 = प_3 इ_3$$

$$\therefore क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 + क_4 अ_4 = प_3 इ_3.$$

या प्रमाणें कितीही प्रेरणा असल्या, आणि त्यांची परिणामी प्रेरणा प आणि तिचें ब बिंदुपासून अंतर इ असेल तर.

$$क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 + क_4 अ_4 \cdots \cdots = प इ.$$

टीप १— जर ब बिंदु परिणामी प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेंत असला, तर इ = ०. आणि $क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 \cdots\cdots = 0$ यास्तव जर परस्पर समांतर किंवा मिळणाऱ्या अशा अनेक प्रेरणा एका पातळींत कार्य करीत असतील तर त्यांच्या परिणामी प्रेरणेंतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल, आणि त्या बिंदु भोंवती त्यांच्या योगानें भ्रमण घडणार नाहीं.

टीप २— जर प्रेरणा समतोल असतील, तर प = ० असेल आणि $क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 \cdots = 0$ होईल यास्तव- जेव्हां अनेक प्रेरणा एका पातळींत कार्य करीत असून समतोल असतील, तेव्हां त्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल. म्हणजे समतोल प्रेरणांच्या योगानें त्यांच्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु भोंवती भ्रमण घडणार नाहीं.

टीप ३— जर अनेक प्रेरणा पदार्थावर एका पातळींत कार्य करीत

असतील तर त्या समतोल असतील किंवा त्यांच्या बरोबरीची एक परिणामी प्रेरणा असूं शकेल. जर प्रेरणा समतोल असल्या तर त्यांच्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज सर्वदा शून्य असते. आणि समतोल नसतील. तेव्हां फक्त परिणामी प्रेरणा दर्शक रेषेंतील बिंदु भोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होते. म्हणून केवळ प्ररणांच्या एका बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली म्हणजे त्या सर्वदां समतोल असूं शकत नाहींत. अशा कोणत्याही तीन बिंदु सभोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज जर शून्य असेल तर मात्र त्या प्रेरणा समतोल असतील. कारण अ, ब, क या तीन बिंदु भोंवतालचीं भ्रामकत्वें शून्य असलीं, आणि ते एका रेषेंत नसले, तर जर त्या प्रेरणांस परिणामी प्रेरणा असली तर **अक** आणि **अब** या दोहों रेषांत ती कार्य करील असें होईल. परंतु ही गोष्ट अशक्य आहे. परिणामी प्रेरणा फारतर एका रेषेंत कार्य करील. यास्तव यांस परिणामी प्रेरणा नसून त्या समतोलच असतील. यास्तव जर एका रेषेंत नसणाऱ्या अशा कोणत्याही प्रेरणांच्या पातळींतील तीन बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल, तर त्या समतोल असतील.

(६६) जर सर्व प्रेरणा एका बिंदूंत कार्य करीत असतील, तर अनेक प्रेरणांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या भ्रामकत्वा बरोबर असते हें क. ६२ प्रमाणें सुलभ रीतीनें सिद्ध करितां येतें.

समजा कीं, **अ** बिंदुस्थळीं प्रेरणा कार्य करीत आहेत. आणि **ब** हा स्थिर बिंदु आहे.

ब संबंधीं दिलेल्या प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज

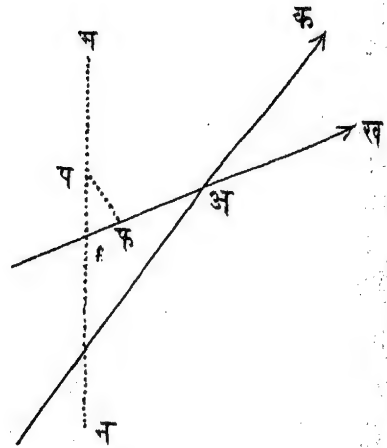
= **बअ** शीं लंब दिशेंतील त्यांच्या पृथग्भूत भागांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज.

= ब अ× ह्या पृथग्भूत भागांची बेरीज.

= ब अ× ह्या दिशेंतील परिणामी प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग.

= ब संबंधीं परिणामी प्रेरणेचें भ्रामकत्व.

(६७) प्रेरणेचें सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व— विवक्षित प्रेरणेचें दिलेल्या रेषेशीं लंब आणि समांतर अशा दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणांमध्यें पृथक्करण केलें तर दिलेल्या रेषेशीं लंब दिशेंत कार्य करणारा पृथग्भूत भाग आणि याची कार्य करण्याची दिशा आणि दिलेली रेषा यांमधील अंतर यांच्या गुणाकारास मूळ प्रेरणेचें दिलेल्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व असें म्हणतात. जर रेषेसभोंवती पदार्थाचें भ्रमण उजवीकडून डावीकडे घडलें व त्या भ्रामकत्वास धन नांव दिलें तर उलट दिशेनें भ्रमण घडल्यास तें भ्रामकत्व ऋण होईल.



क प्रेरणा पदार्थावर अ ठिकाणीं अक दिशेनें कार्यकरीत आहे. नम ही दिलेली रेषा आहे.

नम रेषेशीं लंब अशी अ बिंदूतून जाणारी पातळी नम रेषेस प बिंदुस्थळीं छेदिते. नमशीं लंब दिशेंत कार्य करणारा कचा पृथग्भूत भाग ख आहे असें समजूं. तर खची कार्य करण्याची दिशा नमशीं लंब अशा प अ पातळींत असेल. तिजवर प पासून पफ लंब काढ. तर पफ हे नम रेषा आणि खची दिशा यांमधील अंतर आहे.

∴ नम रेषेसंबंधीं क प्रेरणेचें भ्रामकत्व.

= ख × पफ.

= खचें प संबंधीं भ्रामकत्व.

यास्तव विवक्षित रेषेसंबंधीं विवक्षित प्रेरणेचें भ्रामकत्व, दिलेल्या रेषेशीं लंब दिशेंत जो प्रेरणेचा पृथग्भूत भाग त्यामधून जाणारी पातळी ज्या बिंदूंत दिलेल्या रेषेस मिळेल त्या बिंदु सभोंवतालच्या या पृथग्भूत भागाच्या भ्रामकत्वा बरोबर असतें हें उघड आहे.

जर प्रेरणेची दिशा दिलेल्या रेषेशीं समांतर असेल, तर तिचा दिलेल्या रेषेशीं लंब दिशेंत पृथग्भूत भाग असणार नाहीं. म्हणून अशा प्रेरणेचें दिलेल्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व शून्य होईल. जर प्रेरणा दिलेल्या रेषेशीं लंब असेल तर तिचें दिलेल्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व प्रेरणा व तिचें दिलेल्या रेषेपासून अंतर यांच्या गुणाकारा बरोबर होईल.

(६८) पदार्थावर एका बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांच्या एका सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या त्या रेषेसंबंधीं भ्रामकत्वा बरोबर असते.

जर **अ** बिंदुस्थळीं अनेक प्रेरणा कार्य करीत असतील. आणि **नम** ही दिलेली रेषा असेल, व **अ** मधून जाणारी **नम** शीं लंब पातळी **नम** रेषेस **प** बिंदूंत छेदीत असेल, तर प्रत्येक प्रेरणेचें **नम** रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व **नम** शीं लंब दिशेंत कार्य करणाऱ्या तिच्या पृथग्भूत भागाच्या **प** भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. याकरितां सर्व प्रेरणांच्या **नम** संबंधीं भ्रामकत्वाची बेरीज **नम** शीं लंब दिशेंत कार्य करणाऱ्या त्यांच्या पृथग्भूत भागांच्या **प** भोंवतालच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर असेल; म्हणजे त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या **प** भोंवतालच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल. परंतु मूळ प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचा **नम** शीं लंब दिशेंत कार्य करणारा पृथग्भूत भाग, प्रेरणांच्या या दिशेंत कार्य करणाऱ्या पृथग्भूत भागांच्या परिणामी प्रेरणे बरोबर असेल. या करितां सर्व प्रेरणांच्या **नम** संबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज त्यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या **नम** संबंधीं भ्रामकत्वाबरोबर आहे हें सिद्ध झालें.

जर प्रेरणा समतोल असतील तर त्यांची परिणामी प्रेरणा शू-

न्य होईल. आणि तिचें भ्रामकत्वही शून्य होईल. म्हणून समतोल प्रेरणांच्या कोणत्याही रेषे भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल.

पातळी संबंधीं प्रेरणेचें भ्रामकत्व— विवक्षित पातळी संबंधीं प्रेरणेचें भ्रामकत्व प्रेरणा आणि तिच्या कार्यकरणाच्या बिंदूपासून पातळीचें अंतर यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें. या विषयीं ही वरील सिद्धांत सिद्ध करितां येतो.

उदाहरणें.

(१) **क**,**ख** हे दोन बिंदु वर्तुळाच्या परिधावर आहेत. **क** च्या दोहों बाजूंस **खअ** आणि **खब** या दोन ज्या परस्पर लंब अशा असतील, आणि त्या दोन प्रेरणा दर्शवितील, तर त्यांच्या **क** संबंधीं भ्रामकत्वां मधील अंतर सर्वदां सारखें असेल.

(२) जर दोन किंवा अधिक प्रेरणा एका बिंदुस्थळीं कार्य करीत असतील, तर त्या पातळींतील कोणत्याही सरळ रेषेशीं समांतर सरणाऱ्या बिंदुसंबंधीं त्यांच्या भ्रामकत्वांची साधी बेरीज सारखी राहील.

(३) पातळींत एकास्थळीं कार्य करणाऱ्या दोन प्रेरणांच्या दोन बिंदुसंबंधीं भ्रामकत्वांची बेरीज समान असेल, तर त्यांस सांधणारी रेषा प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेच्या दिशेशीं समांतर होईल.

(४) **अबक** त्रिकोणाच्या **अ**,**ब**,**क** कोनांसमोरील बाजूंचे मध्य **ड**,**इ**,**फ** आहेत, तर **अड**,**बइ** आणि **कफ** या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतील.

(५) त्रिकोणाच्या कोनबिंदूवर कोनबिंदूंपासून समोरच्या बाजूंवर जे लंब त्या रेषांत तीन प्रेरणा कार्य करितात व त्या त्रिकोणास सम-

ताल ठेवितात. तर दोन कोनबिंदु सभोंवतालचीं भ्रामकत्वें घेऊन असें सिद्ध करकीं; प्रत्येक प्रेरणा ज्या बाजूशीं लंब दिशेंत कार्य करिते तिशीं प्रमाणांत आहे.

(६) त्रिकोणाच्या कोनास दुभागणाऱ्या रेषांत प,फ,भ या प्रेरणा त्रिकोणाच्या अ,ब,क कोन बिंदूंवर कार्य करितात. व त्रिकोणास समतोल ठेवितात. तर असें सिद्ध करकीं—

$$प : फ : भ : : को\cdot भु \frac{अ}{२} : को\cdot भु \frac{ब}{२} : को\cdot भु \frac{क}{२}.$$

(७) अबकड चौरसाच्या अब बाजूंत २ शेरांची बक बाजूंत २ शेरांची आणि कड बाजूंत ३ शेरांची अशा प्रेरणा कार्य करितात. चवथ्या बाजूंत चवथी प्रेरणा कार्य करीत असून त्यांनीं चौरस समतोल धरिला आहे तर चवथी प्रेरणा काढ.

उ. १ शेरांची कब रेषेंत.

(८) त्रिकोणाच्या कोनबिंदूंपासून समोरच्या बाजूंवर काढलेले लंब जर प्रेरणा दर्शवितील तर त्रिकोण समभूज असल्या शिवाय या प्रेरणा समतोल असणार नाहींत हें सिद्ध कर.

(९) अबक त्रिकोणांत न बिंदु आहे. न बिंदूंतून बाजूंस समांतर रेषा काढिल्या आहेत. त्रिकोणांत पडलेल्या या रेषा जर प्रेरणा दर्शवितील तर त्या न ठिकाणीं दुभागल्या शिवाय समतोल असणार नाहींत असें सिद्ध कर.

(१०) एका दांड्याच्या दोहों शेवटांस दोन दोऱ्या बांधून त्या गांठवल्या आणि एका स्थिर बिंदूस अडकविल्या. जर दांड्याचें वजन त्याच्या मध्यापासून कार्य करील तर असें सिद्ध करकी दोहों दोऱ्यांचे ताण त्यांच्या लांबीच्या प्रमाणांत असतील.

दांड्याच्या मध्यासभोंवतालचीं भ्रामकत्वें घे.

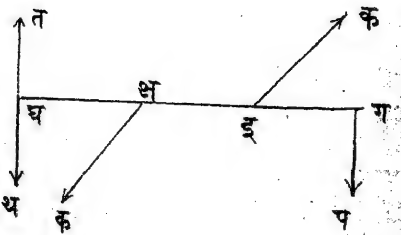
प्रकरण ६.

प्रेरणा युग्म. आणि एकाच पातळींत अनेक स्थळीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा.

(६९) **जुळें किंवा युग्म**:- जेव्हां दोन समांतर प्रेरणा समान असून परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करीत असतील, तेव्हां त्यांची परिणामी प्रेरणा काढतां येणार नाहीं. अशा प्रेरणांनीं पदार्थास कोणत्याच एका दिशेनें गति मिळणार नाहीं. कारण त्यांचीं कार्यें समान असतात. परंतु त्यांच्या योगानें पदार्थ समतोलही राहणार नाहीं. कारण त्या प्रेरणा एकाच बिंदूंत परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करीत नाहींत. अशा प्रेरणांपासून पदार्थ गरगरा फिरत राहतो. अशा तऱ्हेच्या दोन समान आणि विरुद्ध प्रेरणांस **जुळें** किंवा **युग्म** हें नांव दिलें आहे.

(७०) प्रेरणा युग्मास एक परिणामी प्रेरणा असूं शकत नाहीं हें सिद्धही करितां येतें.

क, क हें एक प्रेरणायुग्म आहे. यास परिणामी प्रेरणा असणें शक्य असेल तर असें समजूं कीं, या युग्मास ग प दिशेनें कार्य करणारी प प्रेरणा **क, क** युग्मास समतोल धरिते.



अइ रेषा क,क आणि प प्रेरणांच्या दिशांस अ,इ आणि ग ठिकाणीं मिळण्या जोगी काढ. अइ डावीकडे वाढवून इग= अघ घे. घ ठिकाणीं प्रत्येक प च्या बरोबरीची व तिच्या दिशेशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी अशा दोन त,थ प्रेरणा परस्पर उलट दिशानीं कार्य करणाऱ्या लाव. याणें मूळच्या समतोलत्वांत फेर पडणार नाहीं.

ज्यापेक्षां क,क युग्मास प प्रेरणा समतोल धरिते, त्यापेक्षां त्यास प च्या बरोबरीची युग्मापासून तेवढ्याच अंतरावर उलट दिशेनें कार्य करणारी त प्रेरणा ही समतोल धरील. म्हणून क,क आणि त यांस काढून टाकिलें तरी बाकीच्या प आणि थ परस्पर समतोल असल्या पाहिजेत. परंतु या एकाच दिशेस कार्य करीत असल्यानें ही गोष्ट अशक्य आहे. याच प्रमाणें युग्माच्या पातळींत कोठेंही कार्य करणारी प्रेरणा युग्मास समतोल देवूं शकणार नाहीं असें दाखवितां येईल.

(७१) दोन समांतर प्रेरणा समान व विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या असतील तर त्यांस **प्रेरणायुग्म** किंवा युग्म अथवा जुळें असें म्हणावें.

दोहों प्रेरणांच्या दिशांमधील लंबरूप जें अंतर त्यास युग्माची **भुजा** असें म्हणावें.

युग्माची एक प्रेरणा व तिची भुजा यांच्या गुणाकारास युग्माचें **भ्रामकत्व** असें म्हणावें.

जी रेषा युग्माच्या पातळीशीं लंब आहे व जिची लांबी युग्माच्या भ्रामकत्वाच्या प्रमाणांत आहे तिला युग्माचा **आंस** म्हणावें.

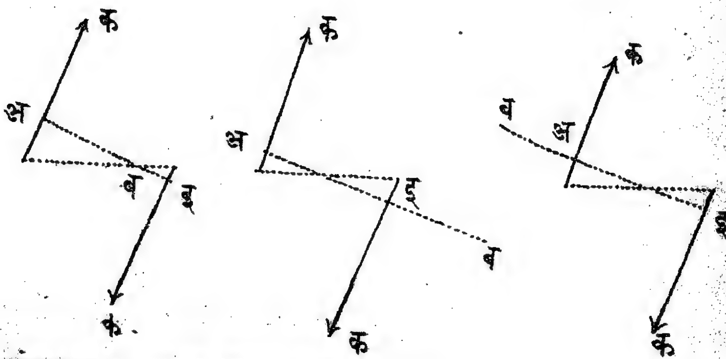
युग्माच्या कार्यानें पदार्थास जें भ्रमण प्राप्त होतें तें सर्वदा एकाच दिशेनें होत नाहीं. हें भ्रमण कधीं उजवीकडून डावीकडे आणि कधीं डावीकडून उजवीकडे होईल. त्या प्रमाणें युग्मास किंवा त्याच्या दिशांस धन व ऋण हीं नांवें देतात. युग्माच्या भुजेचा

मध्य बिंदु स्थिर असून त्या भोंवती युग्माच्या प्रेरणांनीं भुजा फिरत आहे असें कल्पिलें तर भुजा दोन भिन्न दिशांनीं भ्रमण करील. भुजेच्या मध्यांतून युग्माच्या पातळीवर लंब म्हणजे युग्माचा आंस काढिला. व त्या आंसा भोंवती युग्मानें पदार्थ फिरत असला तर घड्याळाच्या कांट्या प्रमाणें भ्रमण होत असेल तेव्हां त्या युग्माच्या भ्रामकत्वास धन आणि त्या उलट भ्रमण होत असेल तेव्हां त्याच्या भ्रामकत्वास ऋण म्हणतात. एका दिशेनें भ्रमण करविणाऱ्या युग्मांस सजातीय आणि भिन्न दिशांनीं भ्रमण करविणाऱ्या युग्मांस विजातीय युग्में म्हणावें.

आतां प्रेरणा युग्माविषयीं मुख्य सिद्धांत सांगतो

सिद्धांत१– प्रेरणा युग्माचें त्याच्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालचें भ्रामकत्व सर्वदां सारखें असतें. व तें दोहों प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर असतें.

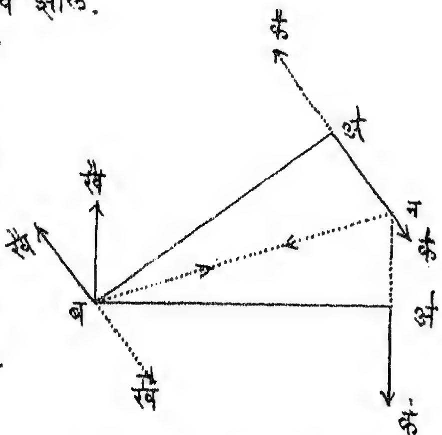
क, क हें एक युग्म आहे आणि त्याच्या पातळींतील **ब** हा एक बिंदु आहे. ब पासून दोहोंच्या कार्यदर्शक रेषांवर **बअ** व **बइ**



हे लंब काढ१ जर **ब** बिंदु दोहोंच्या मध्यें असेल तर दोहोंचीं भ्रामकत्वें सजातीय असतील. म्हणून त्यांच्या भ्रामकत्वांची क× अब+ क× बइ= क(अब+ बइ)= क× अइ होईल. जर **ब** बिंदुबा-

हेर असेल, तर दोहोंचीं भ्रामकत्वें विजातीय असतील म्हणजे एक धन आणि एक ऋण असेल त्यांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज (क× बअ) — (क× बइ) = क(बअ — बइ) = क× अइ असेल. म्हणजे पूर्वीच्या इतकेंच भ्रामकत्व झालें.

सिद्धांत २- प्रेरणायुग्म त्याच्या पातळींत त्याच्या भुजेच्या एका टोंकाभोंवती कसेंही फिरविलें तरी त्याचा परिणाम तेवढाच होतो.



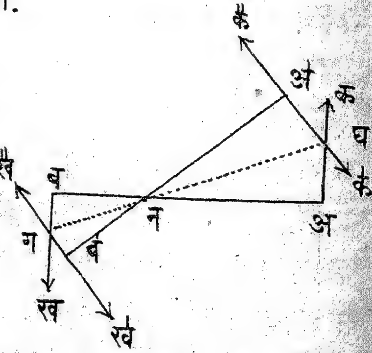
अक, बख हें एक प्रेरणायुग्म असून त्याची भुजा **अब** आहे.

समजा कीं, **बअ** भुजा **ब** भोंवतीं **बअ** या स्थितींत फिरविली. **अ** या बिंदुस्थळीं **अक** एवढ्याच **अक**, **अक** या दोन समान प्रेरणा परस्पर विरुद्ध आणि **बअ** शीं लंब अशा लाविल्या आणि **ब** बिंदुस्थळीं ही **बअ** शीं लंब आणि प्रत्येक **अक** शीं समान अशा दोन **बख** आणि **बख** या दोन समान व विरुद्ध प्रेरणा लाविल्या. या नव्या प्रेरणांचे जोड परस्पर समान आणि विरुद्ध असल्यानें त्यांचा परिणाम कांहीं होणार नाहीं. म्हणून या चार प्रेरणा आणि मुळचें युग्म यांपासून मूळच्या इतकाच परिणाम होईल.

अक आणि **अक** यांच्या कार्यदर्शक रेषा परस्पर एका **न** बिंदूंत मिळेपर्यंत वाढीव, आणि **बन** सांध.

आतां **बअन** आणि **बअन** हे दोन काटकोन त्रिकोण समान आहेत. म्हणून **बन** रेषा **अनअ** आणि **अबअ** या कोनांस दुभागते. **अक** आण **अक** या प्रेरणा समान आहेत. यांस **न** बिंदुस्थळीं कार्य करण्यास लाविलें तर त्यांची परिणामी प्रेरणा **अनअ** कोनास

दुभागील, म्हणजे तिचें कार्य नब रेषेंत होईल. तसेंच रव आणि रवॅ म्हणजे बरव आणि बरवॅ या दोन समान प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा अक आणि अकॅ यांच्या परिणामी प्रेरणे एवढीच होईल. आणि ती रवबरवॅ कोनास दुभागील. म्हणजे ती बन रेषेंत कार्य करील. याकरितां दोन्ही परिणामी प्रेरणा समान आणि परस्पर उलट असल्यानें नाश पावतील. आतां बाकी कॅकॅ आणि बरवॅ या दोन समान प्रेरणा ब आणि अॅ या बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या राहिल्या. म्हणजे ब-अ भुजेवरील युग्म ब अॅ स्थळीं नेल्या सारखें झालें. या प्रमाणें अ भोंवती जरी भुजा फिरविली तरी युग्मास त्या नव्या स्थितींत नेतां येतें व त्याचा परिणाम तेवढाच राहतो.

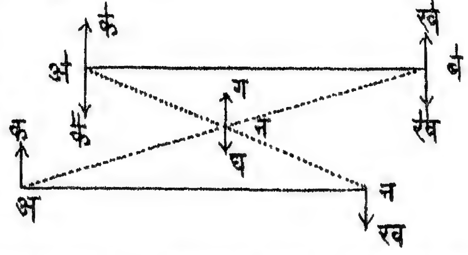


कुरलरी. युग्म भुजेच्या एका टोंका भोंवतीं न फिरवितां तिच्यांतील कोणत्याही बिंदु भोंवती फिरलें तरी त्याचा परिणाम तेवढाच होतो.

समजा कीं, ब अ भुजेच्या न बिंदूंतून युग्म फिरलें व त्याच्या नव्या स्थितींतील भुजेच्या बॅ अॅ टोंकापाशीं भुजेशीं लंबदिशांत कॅ,कॅ आणि रवॅ,रवॅ प्रेरणा प्रत्येक परिमाणानें क किंवा रव च्या बरोबरीची अशा परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या लाविल्या. आणि रव रवॅ आणि क व कॅ यांच्या दिशा परस्परांस ग आणि घ ठिकाणीं मिळेपर्यंत वाढविल्या तर गन आणि घन रेषा बगबॅ आणि अंघअ कोनांस दुभागितील व त्या एकाच रेषेंत असतील. या करितां क,कॅ प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा घन दिशेनें आणि रव,रवॅ प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा गन दिशेनें कार्य करील. या दोन्ही प्रेरणा परिमाणानें समान आहेत म्हणू-

न एकाच रेषेंत परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करीत असल्यानें नाशपावतील म्हणजे ख, ख' आणि क क' प्रेरणा परस्पर नाश पावल्या म्हणजे बाकी ख' आणि क' या दोन प्रेरणा ब' आणि अ' ठिकाणीं राहिल्या या मूळच्या प्रेरणांशीं समान आहेत. म्हणून पहिलेंच युग्म या नव्या स्थितींत नेल्या सारखें झालें.

सिद्धांत ३ – दृढ पदार्थावर कार्य करणाऱ्या युग्माच्या भुजेचें तिच्याशीं समांतर अशा युग्माच्या पातळींत स्थलांतर केलें तरी युग्माचें कार्य मूळच्या इतकेंच होतें.



समजा कीं अक आणि बख हें युग्म अब भुजेवर कार्य करीत आहे. या युग्माच्या पातळींत अ'ब' ही रेषा अबच्या बरोबर व तिशीं समांतर अशी काढ; अ' व ब' या ठिकाणीं अब शीं लंब रेषेंत कार्य करणाऱ्या व अक शीं समान अशा अ'क अ'क' आणि ब'ख ब'ख' या चार प्रेरणा लाव. येणेंकरून मूळच्या युग्माच्या कार्यांत फेर पडणार नाहीं. कारण हे दोन जोड परस्पर समान व विरुद्ध असल्यानें त्यांचीं कार्यें परस्पर नाश पावतील. आतां ज्यापेक्षां अब आणि अ'ब' या दोन रेषा परस्पर समान व समांतर आहेत त्यापेक्षां अबब'अ' या समांतर भुजचौकोनाचे कर्ण अब' आणि अ'ब हे परस्परांस छेदन बिंदुस्थळीं दुभागितील. ते न ठिकाणीं दुभागतात असें समजूं. आतां अब' कर्णाच्या अ आणि ब' टोंकांपाशीं अक, ब'ख' या दोन समान प्रेरणा एकाच दिशेस कार्य करीत आहेत यांच्या जागीं त्यांची परिणामी प्रेरणा न ठिकाणीं कार्य करणारी व अकशीं समांतर अशी नग प्रेरणा ठेव. आणि अ'ब या कर्णाच्या टोंकाशीं कार्य

करणाऱ्या कॅ कै आणि बख या समान व समांतर प्रेरणांच्या जागीं त्यांची परिणामी प्रेरणा नघ ठेव. या परस्पर समान व एकाच रेषेतें असल्यानें त्यांचें कार्य घडणार नाहीं. म्हणून अक, बख आणि अकै, बख या चार प्रेरणा परस्पर नाश पावतात. यास्तव या चोहोंस सुळींच काढून टाकिलें, तरी हरकत नाहीं. यांस काढिल्यावर बाकी अकै आणि बखै या दोन समान व परस्पर विरुद्ध प्रेरणा अबै ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या राहिल्या. अबै ही रेषा या युग्माची भुजा व ती मूळच्या युग्माच्या अब भुजे एवढीच घेतली आहे. हें युग्म असून याच्या प्रेरणा मूळच्या युग्माच्या प्रेरणां एवढ्याच आहेत. म्हणून मूळचेंच युग्म या नवीन ठिकाणीं आणिल्या सारखें आहे.

कुरलरी- अबै रेषा युग्माच्या पातळींत न घेतां त्या पातळीशीं समांतर अशा पातळींत अबशीं समांतर घेतली, तरी वरील सर्व कृति व सिद्धता लागू होईल. म्हणून युग्माच्या भुजेचें युग्माच्या पातळींत किंवा त्या पातळीशीं समांतर अशा दुसऱ्या पातळींत तिच्याशीं समांतर असें स्थलांतर केलें तरी त्याच्या कार्यांत फेर पडत नाहीं. मात्र नव्या स्थितींत युग्मापासून भ्रमण मूळच्याच दिशेनें झालें पाहिजे.

सिद्धांत ४- ज्याच्या भुजांचीं एकी कडचीं टोकें एका बिंदूंत मिळतात आणि ज्यांचीं भ्रामकलें समान आहेत अशा दोन प्रेरणा युग्मांचीं कार्यें समान होतात आणि एकाच्या जागीं दुसरें ठेविलें तरी फेर पडत नाहीं.



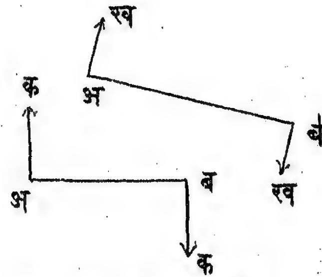
एका युग्माच्या प्रेरणा क,क आहेत. दुसऱ्या युग्माच्या प्रेरणा ख,ख आहेत. एकाची भुजा अब आहे. दोहोंचीं टोंकें अ बिंदूंत मिळतात. दुसऱ्याची भुजा अब रेषेंत नसल्यास अ बिंदुभोंवती फिरवून तिला अब रेषेंत आण. दुसऱ्या युग्माची भुजा अअ' झाली. अ आणि अ' या दोहों बिंदूंच्या स्थळीं ख प्रेरणेच्या बरोबरीच्या अख', अख'' आणि अ'ग', अ'ग'' अशा चार प्रेरणा लाविल्या तर त्या परस्पर नाश पावतील, व यामुळें मूळच्या युग्माच्या कार्यांत फेर पडणार नाहीं.

या दोहों युग्मांचीं भ्रामकत्वें समान आहेत.

$$\therefore क \times अब = ख \times अअ'$$

या करितां ब क आणि अ'ग' यांची परिणामी प्रेरणा (क-ख) अ स्थळीं कार्य करणारी असेल. व ती अख'' या दिशेनें कार्य करील. (कलम ४९ पहा) त्या ठिकाणीं अख''ही प्रेरणा आहेच. यामुळें अख'' म्हणजे ख, आणि क-ख अशा दोन प्रेरणा अख'' या रेषेंत कार्य करितील म्हणून फक्त क प्रेरणा अख'' या रेषेंत कार्य करील. क प्रेरणा अक दिशेंत कार्य करीत आहे. यास्तव या दोनही नाश पावतील. म्हणून बाकी अ'ग'' आणि अख' अशा दोन समान व समांतर प्रेरणा ख च्या बरोबरीच्या राहिल्या, म्हणजे क,क युग्माच्या जागीं तेवढ्याच भ्रामकत्वाचें ख,ख युग्म राहिलें. यास्तव दोहोंचें कार्य सारखें असून एकाच्या जागीं दुसरें ठेवण्यास हरकत नाहीं.

सिद्धांत ७.— एका युग्माच्या जागीं तेवढ्याच सजातीय भ्रामकत्वाचें दुसरें युग्म त्याच्या पातळींत ठेवितां येईल. क,क आणि ख,ख हीं दोन सारख्या व सजातीय भ्रामकत्वांचीं युग्में आहेत. तर एक काढून त्याच्या जागीं दुसरें ठेवितां येईल.



कारण क,क युग्माची भुजा अब अ भोंवतीं फिरवून अ'ब' शीं समांतर करिता येईल. नंतर अब भुजा बकडे वाढवून तीस अ'ब' बरोबर करितां येईल. आणि तिच्या दोहों टोंकांस ख,ख या प्रेरणा लावितां येतील. आणि शेवटीं तिचें तिशीं समांतर स्थलांतर करून तीस अब या जागीं आणितां येईल.

(७२) वरील सिद्धांतावरून हे उघड आहे कीं जर एकाच पातळींत किंवा परस्पर समांतर अशा दोन पातळ्यांत असणाऱ्या दोन सजातीय युग्मांचीं भ्रामकत्वें समान असल्यास त्यांचीं कार्येंसमान होतील. आणि अशीं युग्में विजातीय म्हणजे परस्पर विरुद्ध दिशांनीं भ्रमण उत्पन्न करणारीं असल्यास परस्पर समतोल असतील.

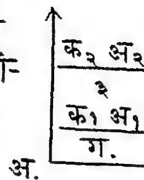
सिद्धांत ६.— अनेक युग्मांचें परिणामी युग्म काढणें— अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वाच्या बेरजे बरोबर ज्या युग्माचें भ्रामकत्व असतें तें त्याचें परिणामी युग्म असतें.

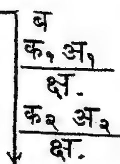
$क_1$ $क_2$ $क_3$ $क_4$ ... ... युग्माच्या प्रेरणा आहेत.

$अ_1$ $अ_2$ $अ_3$ $अ_4$ ... ... त्यांच्या भुजा आहेत.

$क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 + क_4 अ_4$ .... त्यांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज होईल.

आतां प्रत्येक युग्माच्या जागीं असें दुसरें युग्म ठेवा. त्याचा अंस अब म्हणजे क्ष होईल.





म्हणजे चौथ्या सिद्धांताप्रमाणें $क_1 अ_1$ या युग्माच्या जागीं

$\frac{क_1 अ_1}{क्ष}$ प्रेरणा अ स्थळीं आणि एवढीच प्रेरणा ब स्थळीं असें युग्म होईल. $क_2अ_2$ यांच्या जागीं $\frac{क_2 अ_2}{क्ष}$ अ स्थळीं आणि $\frac{क_2 अ_2}{क्ष}$ ब स्थळीं असें युग्म होईल. या प्रमाणें केल्यानें अ स्थळीं $\frac{क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3}{क्ष}$ ही प्रेरणा आणि ब स्थळीं एवढीच दुसरी प्रेरणा होईल. म्हणजे हें परिणामी युग्म होईल. या युग्माचें भ्रामकत्व $क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 \cdots\cdots$ इत्यादि म्हणजे मूळच्या युग्माच्या भ्रामकत्वाच्या बेरजेबरोबर होईल.

जर $\frac{क_1 अ_1}{क्ष}, \frac{क_2 अ_2}{क्ष} \cdots\cdots$ इत्यादि.

प्रेरणांस $के_1, के_2, के_3 \cdots\cdots$ इत्यादि.

नांवें दिलीं तर.

$$क्ष (के_1 + के_2 + के_3 \cdots\cdots) = क_1 अ_1 + क_2 अ_2 + क_3 अ_3 \cdots$$

$$जर\ के_1 + के_2 + के_3 \cdots \cdots 0$$

तर मूळचीं युग्में समतोल असतील.

यावरून हें उघड आहे कीं, जर अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल, आणि जेव्हां युग्में उजवी कडून डावीकडे व डावीकडून उजवीकडे भ्रमण उत्पन्न करणारीं असतील तेव्हां त्यांचीं भ्रामकत्वें धन व ऋण होतील. व त्यांची बेरीज शून्य होईल. तर तीं युग्में समतोल असतील. तसेंच जर दोन युग्में सारख्या भ्रामकत्वांचीं पण परस्पर उलट भ्रमण करणारीं असतील तर तींही समतोल असतील.

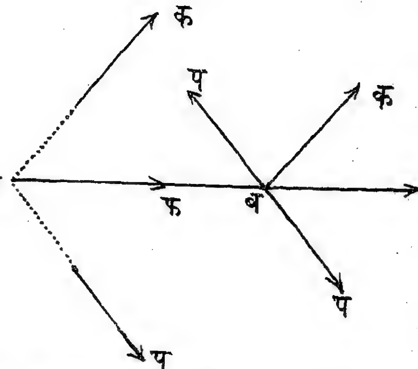
सिद्धांत ७ — एकाच पातळींत एक प्रेरणा व एक प्रेरणा युग्म अशीं एका दृढ पदार्थावर कार्य करीत असतील, तर जें कार्य घडेल, तेवढेंच ती प्रेरणा दुसऱ्या ठिकाणीं तिच्या मूळच्या दिशेशीं समांतर लाविल्यास उत्पन्न करील.

क ही एक प्रेरणा आहे व प ही युग्माची प्रेरणा आहे.

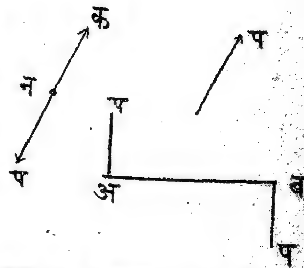
जर विवक्षित प्रेरणा, युग्मांच्या प्रेरणांशीं समांतर असेल, तर क व युग्माची त्या दिशेस कार्य करणारी प प्रेरणा यांची परिणामी प्रे-

रणा क+प होईल. आणि क+प आणि युग्मांची दुसरी प्रेरणा प परस्पर उलट दिशेनें कार्य करितील. म्हणून त्यांची परिणामी प्रेरणा क+प−प= क होईल व ही मूळच्या क प्रेरणेच्या दिशेशीं समांतर असेल.

जर प्रेरणा परस्पर समांतर नसल्या तर क आणि युग्मांपैकी एक प्रेरणा यांच्या कार्य मार्गाच्या रेषा वाढविल्या म्हणजे त्या अ स्थळीं मिळतील. अ स्थळीं दोनही प्रेरणांस कार्य करण्यास लावून त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ. ती फ आहे असें घेऊं. आतां फ प्रेरणेची कार्य दर्शक रेषा वाढविल्यास ती युग्माचीजी दुसरी प प्रेरणा तिच्या कार्य मार्गास मिळेल. ती ब ठिकाणीं मिळाली असें घेऊं. व ब ठिकाणीं त्या प्रेरणेस कार्य करण्यास लावूं आतां तिचें पृथकरण करून तिच्या मूळच्या प्रेरणांशीं समांतर अशा क, प प्रेरणा काढूं. प,प प्रेरणा परस्पर उलट व एका रेषेंत असल्यानें नाश पावतील, आणि क प्रेरणा ब ठिकाणीं मूळच्या क प्रेरणेशीं समांतर अशी कार्य करणारी राहील.



(२) क ही प्रेरणा न बिंदूवर न क दिशेनें कार्य करिते व प प हें एक युग्म त्याच पातळींत कार्य करीत आहे त्याची भुजा अ ब आहे म्हणून त्याचें भ्रामकत्व प× अब आहे.

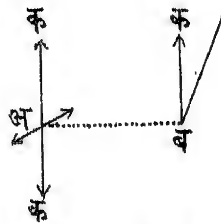


वरील सिद्धांत १ प्रमाणें प× अब या युग्माच्या बरोबरी-

नें दुसरें असें युग्म काढकीं, त्याची प्रत्येक प्रेरणा क प्रेरणे बरोबर असेल. तर त्याची भुजा $\frac{प \times अब}{क}$ होईल, हें युग्म असें फिरीव कीं, त्याची एक प्रेरणा मूळच्या क प्रेरणेच्या कार्यदर्शक रेषेंत पण उलट दिशेनें कार्य करील. आतां मूळची क प्रेरणा आणि तिच्या कार्यदर्शक रेषेंत पण उलट दिशेनें कार्य करणारी नव्या युग्माची क प्रेरणा या परस्पर नाश पावतील. आणि बाकी क प्रेरणा मूळच्या प्रेरणेच्या दिशेशीं समांतर दिशेंत आणि तिजपासून $\frac{प \times अब}{क}$ लंबरूप अंतरावर कार्य करणारी राहील. म्हणून मूळची प्रेरणा व युग्म यांच्या बरोबर ही एक प्रेरणा झाली.

सिद्धांत ८ — जर एकादी प्रेरणा पदार्थावर कार्य करीत असेल तर तिच्या बदला तिशीं समांतर दिशेंत पदार्थाच्या दुसऱ्या विवक्षित बिंदूंत तीच प्रेरणा लाविली आणि तिच्या विवक्षित बिंदु सभोंवतालच्या भ्रामकत्वा एवढ्या भ्रामकत्वाचें युग्म लाविलें तरी या दोहोंचीं कार्यें मूळच्या प्रेरणेच्या कार्या एवढींच होतील.

समजा कीं, क प्रेरणा बक दिशेनें पदार्थावर कार्य करीत आहे. अ हा दुसरा बिंदु पदार्थांतील आहे अ स्थळीं क च्या बरोबरीच्या दोन समान प्रेरणा परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या लाविल्या तर त्यांचीं कार्यें परस्पर नाश पावतील. व त्यापासून पदार्थावर कांहीं निराळें कार्य घडणार नाहीं. परंतु आतां ब बिंदुस्थळीं जी एक क प्रेरणा पूर्वी कार्य करीत होती तिच्या जागीं अ स्थळीं तेवढीच क प्रेरणा मूळच्या प्रेरणेशीं समांतर दिशेंत कार्य करीत असुन बक, अक हें युग्म ही कार्य करीत आहे. अ पासुन बक वर अब लंब काढ म्हणजे मूळच्या क प्रेरणेचें अ भोंवतालचें भ्रामकत्व क × अब आहे. तेंच क, क या युग्माचें ही भ्रामकत्व आहे; यास्तव



मूळची एक प्रेरणा तीच प्रेरणा व युग्म यांच्या बरोबर आहे.

या प्रमाणें जेव्हां एका पातळींत अनेक प्रेरणा पदार्थावर कार्य करीत असतील तेव्हां या सर्व प्रेरणांस दुसऱ्या विवक्षित बिंदूवर कार्य करण्यास लावून तितकीं युग्में ही लावितां येतील. मात्र त्या युग्मांची भ्रामकत्वें विवक्षित बिंदु सभोंवतालच्या प्रेरणांच्या भ्रामकत्वां बरोबर असावीं, व युग्माचें एक टोंक विवक्षित बिंदूंत असावें.

आतां विवक्षित बिंदुस्थळीं लाविलेल्या अनेक प्रेरणांची एक परिणामी प्रेरणा काढितां येईल. आणि तसेंच जीं अनेक युग्में कार्य करण्यास लाविलीं त्यांचें एक परिणामी युग्महीं काढितां येईल.

(७३) या सिध्दांतावरून हें स्पष्ट आहे कीं, जर एका पातळींत अनेक स्थळीं अनेक प्रेरणा कार्य करीत असतील, व त्या परस्पर समांतर नसतील, तर वरील प्रमाणें प्रत्येक प्रेरणेविषयीं करीत गेल्यानें त्यांच्या जागीं दुसऱ्या एका स्थळीं कार्य करणाऱ्या त्याच प्रेरणा व तितकीं युग्में येतील.

(१) या सर्व प्रेरणा एका स्थळीं कार्य करितील. आणि त्यांच्या दिशा मूळच्या प्रेरणांशीं समांतर व परिमाणें तेवढींच असतील. यांची एक परिणामी प्रेरणा त्या बिंदुस्थळीं कार्य करणारी काढितां येईल.

(२) जीं अनेक युग्में येतील त्यांचीं भ्रामकत्वें मूळच्या प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांबरोबर असतील. अनेक युग्मांचें भ्रामकत्व प्रेरणांच्या भ्रामकत्वाच्या बेरजे बरोबर होईल.

(१) जर परिणामी युग्म नाश पावलें, म्हणजे जर अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य होईल, तर एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा राहिली, म्हणजे दिलेल्या अनेक प्रेरणांस एक परिणामी प्रेरणा असेल.

(२) जर एका बिंदूंत कार्य करणाऱ्या अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा नाश पावेल तर मूळच्या अनेक प्रेरणा एका युग्मा बरोबर असतील.

(३) जर परिणामी प्रेरणा व परिणामी युग्म दोनही शून्य होतील, म्हणजे नाश पावतील, तर मूळच्या प्रेरणा समतोल असतील.

(४) जर दोनही नाश पावणार नाहींत तेव्हां त्यांच्या जागीं (सिद्धांत ७ प्रमाणें) एक प्रेरणा ठेवितां येईल.

यास्तव जर अनेक प्रेरणा एका पातळींत कार्य करीत असतील तर त्या समतोल असतील. किंवा एका परिणामी प्रेरणेबरोबर असतील किंवा एका युग्माबरोबर असतील.

(७४) जर प्रेरणा एका बिंदूंत कार्य न करितां पदार्थावर एका पातळींत अनेक बिंदूंवर कार्य करीत असल्या तरी प्रेरणा संचरत्व आणि प्रेरणैकीकरण यांच्या सहाय्यानें त्यांची परिणामी प्रेरणा काढितां येते.

अनेक प्रेरणा अनेक स्थळीं कार्य करणाऱ्या असतील तेव्हां त्या परस्पर समांतर असतील किंवा नसतील. समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा (क. ५२ प्रमाणें) काढतां येईल. मात्र जेव्हां एकादिशेस कार्य करणाऱ्या समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा विरुद्ध दिशेस कार्य करणाऱ्या परिणामी प्रेरणे बरोबर असेल, आणि त्या एका रेषेंत कार्य न करितील तर तें युग्म होईल आणि समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा युग्म होईल म्हणजे त्या प्रेरणांपासून पदार्थास भ्रामक गति प्राप्त होईल.

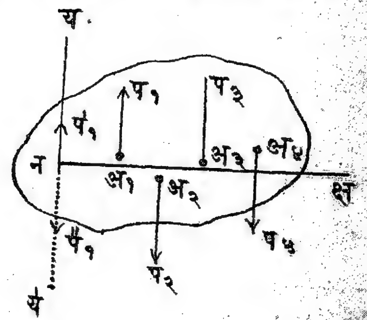
प्रेरणा समांतर नसतील तेव्हां कोणत्याही दोन प्रेरणा घ्याव्या. त्यांच्या दिशा परस्पर मिळेपर्यंत वाढवाव्या. त्या बिंदूंत प्रेरणा (प्रेरणा-संचरत्वाच्या नियमाप्रमाणें) कार्य करीत आहेत असें समजावें. आणि त्यांची परिणामी प्रेरणा काढून ती त्या दोन प्रेरणांच्या जागीं घ्यावी. न-

तर या परिणामी प्रेरणेची दिशा तिसऱ्या प्रेरणेच्या दिशेस मिळण्या जोगी वाढवावी. नंतर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढून त्यांच्या जागीं ती घ्यावी. या प्रमाणें करीत असतां मध्येंच परिणामी प्रेरणा दुसऱ्या प्रेरणेशीं समान, समांतर आणि विरुद्ध दिशेनें कार्य करणारी आली तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढतां येणार नाहीं. परंतु हें युग्म आणि दुसरी प्रेरणा यांचें सि॰ ७॰ प्रमाणें एकीकरण करून एक प्रेरणा काढतां येईल. असें करितां करितां अखेरीस युग्मच आलें तर अनेक प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा युग्म होईल. जर अखेरीस एक युग्म व एक प्रेरणा राहिली तर त्यांचें एकीकरण करून एक प्रेरणा काढतां येईल. जर अखेरीस प्रेरणा परस्पर नाश पावतील तर त्या परस्पर समतोल असतील. यास्तव जर अनेक प्रेरणा अनेक स्थळीं पदार्थावर कार्य करीत असतील, तरत्या समतोल असतील. किंवा त्यांस एक परिणामी प्रेरणा असेल, किंवा त्यांस एक परिणामी युग्म असेल.

(७७) एकाच पातळींत पदार्थावर अनेक ठिकाणीं कार्यकरणाऱ्या अनेक प्रेरणा समतोल राहण्यास कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात तें काढणें

(१) प्रथमतः प्रेरणांच्या दिशा परस्पर समांतर आहेत असें घेऊं.

प१,प२,प३,प४ इत्यादि समांतर प्रेरणा एकाच पातळींत अ१, अ२,अ३,अ४ इत्यादि बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत. यांची परिणामी प्रेरणा काढणें आहे.



प्रेरणांच्या पातळींत एक न बिंदु घेऊन त्या पासून नथरेषा प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर का-

ढ आणि नय वर नक्षन लंब काढ.

$प_1$, $प_2$ इत्यादि प्रेरणांच्या दिशांवर न बिंदूपासून काढलेले लंब $क्षन_1$, $क्षन_2$ $क्षन_3$ $क्षन_4$ इत्यादि आहेत असें मानूं हे लंब म्हणजे प्रेरणांच्या दिशा नक्षन रेषेस मिळेपर्यंत वाढविल्या म्हणजे छेदन बिंदूंचीं अंतरें च असतील.

आतां न बिंदूपाशीं $प_1$ प्रेरणेच्या बरोबरीच्या आणि तिच्याशीं समांतर दिशेंत कार्य करणाऱ्या म्हणजे नय रेषेंत कार्य करणाऱ्या अशा दोन समान प्रेरणा $प'_1$, $प''_1$ परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या लाव. तर $प''_1$ आणि $प_1$ हें युग्म होईल. व यांचें भ्रामकत्व $प_1 क्षन_1$ असेल. यास्तव मूळच्या $प_1$ प्रेरणेच्या जागीं न ठिकाणीं कार्य करणारी $प'_1$ प्रेरणा आणि $प_1$, $क्षन_1$ हें युग्म अशा झाल्या व त्यांचें कार्य मूळच्या प्रेरणे एवढेंच राहिलें. या प्रमाणें प्रत्येक $प_2$ च्या बरोबरीची आणि परस्पर विरुद्ध दिशेनें नय रेषेंत कार्य करणाऱ्या अशा दोन प्रेरणा न बिंदुस्थळीं लाविल्या तर $अ_2$ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या $प_2$ प्रेरणेच्या जागीं न ठिकाणीं नय रेषेंत कार्य करणारी $प'_2$ प्रेरणा आणि $प_2$ आणि $प''_2$ हें युग्म होतील. या युग्माचें भ्रामकत्व $प_2 क्षन_2$ आहे. हें भ्रामकत्व ऋण आहे. कारण या युग्मानें पहिल्याच्या उलट दिशेनें भ्रमण घडेल.

या प्रमाणें करीत गेल्यानें $अ_1$ $अ_2$ $अ_3$ इत्यादि ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या जागीं य न य' या रेषेंत न बिंदुस्थळीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा येतील. व तितकीं युग्में येतील. यनय' रेषेंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा त्यांच्या केवळ बेरजे बरोबर असेल म्हणजे.

$$प = प_1 - प_2 + प_3 - प_4 \cdots \cdots \cdots$$

अनेक युग्मांचें एक परिणामी युग्म काढितां येईल. व त्याचें भ्रामकत्व अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर अ-

सेल म्हणजे.

$$प_1 क्ष_1 - प_2 क्ष_2 + प_3 क्ष_3 - प_4 क्ष_4 \ldots \ldots \ldots$$

ज्या प्रेरणा विरुद्ध दिशेनें कार्य करितात त्यांस ऋण चिन्ह जोडावयाचें आणि ज्यांचीं भ्रामकत्वें विरुद्ध दिशांनीं भ्रमण उत्पन्न करतील त्यांसही ऋण चिन्ह लावावयाचें हें नेहमी गर्भित असतें. म्हणून परिणामी प्रेरणा दर्शविण्यास प आणि परिणामी युग्म दर्शविण्यास ग अशीं अक्षरें घेतलीं तर साधारण सारण्या अशा होतील.

$$प = प_1 + प_2 + प_3 + प_4 \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$ग = प_1 क्ष_1 + प_2 क्ष_2 + प_3 क्ष_3 + प_4 क्ष_4 \ldots प_न क्ष_न$$

$प_1, प_2, प_3$ प्रेरणा समतोल असण्यास

$$प_1 + प_2 + प_3 \ldots \ldots \ldots \ldots = 0$$

$$प_1 क्ष_1 + प_2 क्ष_2 + प_3 क्ष_3 \ldots \ldots = 0$$

असें असलें पाहिजे. पहिली प्रेरणांची साधी बेरीज आहे. दुसरी सारणी प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज आहे. न हा पातळींतील हवा तो बिंदु आहे.

या करितां अनेक समांतर प्रेरणा समतोल राहण्यास त्यांची बेरीज शून्य असली पाहिजे, आणि पातळींतील प्रत्येक बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे.

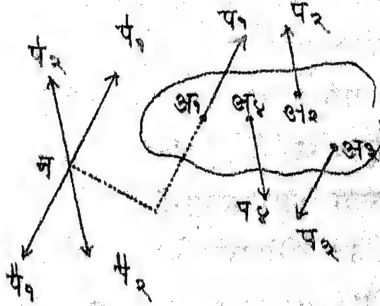
जर फक्त समांतर प्रेरणांची बेरीज शून्य असून भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य नसेल, तर प्रेरणां बरोबर एक युग्म असेल, व त्याचें भ्रामकत्व प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर असेल.

जर भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल तर प्रेरणां बरोबर एक परिणामी प्रेरणा असेल.

जर दोनही शून्य नसतील तर त्या प्रेरणा बरोबर एक परिणामी प्रेरणा व एक परिणामी युग्म असेल व या बरोबर एक प्रेरणा नि-

घेल.

(२) असें समजूं कीं, प$_{१}$ प$_{२}$ प$_{३}$ प$_{४}$ प्रेरणा परस्पर समांतर नसून ह्या त्या दिशांनीं कार्य करितात.



प्रेरणांच्या पातळींत न हा कोणताही बिंदु घे आणि नक्ष$_{१}$ आणि नय या परस्परांशीं काटकोन करणाऱ्या रेषा काढ.

न ठिकाणीं प$_{१}$ आणि प$'_{१}$ या परस्पर विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या व प$_{१}$ च्या दिशेशीं समांतर आणि तिच्या बरोबरीच्या अशा लाव. तर प$_{१}$ आणि प$'_{१}$ हें एक युग्म होईल. म्हणून अ$_{१}$ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प$_{१}$ प्रेरणेच्या बरोबर न ठिकाणीं कार्य करणारी प$_{१}$ प्रेरणा आणि प$_{१}$ आणि प$'_{१}$ हें एक युग्म आहेत. याच प्रमाणें अ$_{२}$ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प$_{२}$ प्रेरणेच्या जागीं न ठिकाणीं कार्य करणारी प$_{२}$ आणि प$_{२}$ आणि प$'_{२}$ हें युग्म घेतां येईल. क्षन$_{१}$, क्षन$_{२}$, क्षन$_{३}$ इत्यादि न बिंदूपासून प$_{१}$ प$_{२}$ प$_{३}$ इत्यादि प्रेरणांच्या दिशांवरील लंब समजले, तर वरील दोहों युग्मांचीं भ्रामकत्वें प$_{१}$क्षन$_{१}$, प$_{२}$क्षन$_{२}$ होतील, म्हणजे प्रत्येक युग्मांचें भ्रामकत्व प्रेरणेच्या भ्रामकत्वा बरोबर असतें. म्हणून सर्व प्रेरणांच्या जागीं न ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प$_{१}$, प$_{२}$, प$_{३}$, प$_{४}$ ... ... इत्यादि प्रेरणा आणि तितकींच युग्में ज्यांचीं भ्रामकत्वें प$_{१}$क्षन$_{१}$, प$_{२}$क्षन$_{२}$, प$_{३}$क्षन$_{३}$, प$_{४}$क्षन$_{४}$ ... ... इत्यादि (जसें प्रेरणा आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें कार्य करीत असतील तर) असतील. न ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा काढतां येईल. तसेंच अनेक युग्मांचे परिणामीयुग्मही काढितां येईल. परिणामी युग्माचें भ्रामकत्व अनेक युग्मां-

च्या भ्रामकत्वांच्या म्हणजे अनेक प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर होईल.

(१) यास्तव अनेक प्रेरणांच्या कार्यांपासून पदार्थ समतोल राहण्यास त्या प्रेरणांनीं एका बिंदुस्थळीं कार्य केल्यास त्यांस परिणामी प्रेरणा नसावी. म्हणजे त्यांची परिणामी प्रेरणा शून्य व्हावी. आणि प्रेरणांच्या पातळींतील प्रत्येक बिंदुभोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असावी.

जर परिणामी प्रेरणा मात्र शून्य असेल तर सर्व प्रेरणांबरोबर एक युग्म असेल. त्याचें भ्रामकत्व प्रेरणांच्या पातळींतील कोणत्याहि बिंदुभोंवतालच्या त्यांच्या भ्रामकत्वांच्या बेरजे बरोबर होईल.

जर भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असेल तर प्रेरणांस एक परिणामी प्रेरणा असेल.

जर दोनही शून्यनसतील तर प्रेरणांबरोबर एक प्रेरणा व एक युग्म असेल; आणि त्यां बराबर एक परिणामी प्रेरणा काढितां येईल.

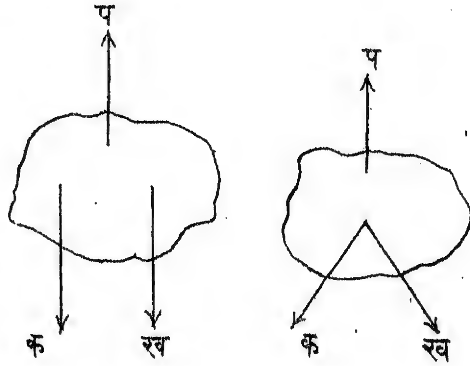
(७६) जर एका पातळींत पदार्थावर तीन प्रेरणा कार्य करीत असून त्या त्यास समतोल ठेवीत असतील, तर त्या परस्पर समांतर असतील किंवा त्यांच्या दिशा परस्पर एका बिंदूंत मिळतील.

क,ख आणि प या तीन प्रेरणा आहेत.

(१) **क,ख** समांतर आहेत असें घेऊं. या दोहोंस एक परिणामी प्रेरणा असेल व ती यांशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करील, आतां तिसरी प्रेरणा प,क आणि ख प्रेरणांस समतोल ठेविते. या करितां क,खची परिणामी प्रेरणा आणि तिसरी प प्रेरणा यांनीं एकाच रेषेंत पण परस्पर उलट दिशांनीं कार्य केलें पाहिजे; म्हणून पची दिशा क,खच्या दिशांशीं समांतर असली पा-

हिजे.

(२) क,ख प्रेरणांच्या दिशा न बिंदूंत मिळतात असें घेऊं. क,ख यांची परिणामी प्रेरणा न बिंदूतून जाईल. परंतु पदार्थ तीनही प्रेरणांनीं समतोल असल्यामुळें ही प्रेरणा व प प्रेरणा परस्पर नाश पावल्या पाहिजेत. तसें होण्यास त्यांचीं कार्यें परस्पर विरुद्ध दिशांनीं एका रेषेंत झालीं पाहिजेत. म्हणून पची दिशा न बिंदूंतून गेलीच पाहिजे.

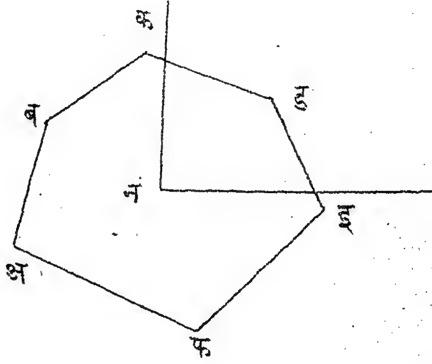


हा सिद्धांत क. ६५ यांत सांगितल्या प्रमाणें ही सिद्ध करितां येतो. तीन प्रेरणा समतोल असल्यास त्यांची परिणामी प्रेरणा शून्य असली पाहिजे. व पातळींतील कोणत्याही बिंदु भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. दोन प्रेरणा न बिंदूंत मिळतात असें समजूं. तर न भोंवतालच्या क,ख यांच्या भ्रामकत्वाची बेरीज शून्य आहे. तिघांच्या न संबंधीं भ्रामकत्वाची बेरीज शून्य होण्यास प चें भ्रामकत्व शून्य असलें पाहिजे. असें होण्यास प ची दिशा न मधून गेलीच पाहिजे. जर दोन प्रेरणा समांतर असतील तर परिणामी प्रेरणा शून्य होण्यास तिसरी प्रेरणा याशीं समांतर व विरुद्ध असलीच पाहिजे.

(७७) पातळींत काढलेल्या बहुकोणाकृतीच्या बाजू क्रमानें परिमाणानें व स्थानानें प्रेरणा दर्शवितील, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा युग्म होईल व त्याचें भ्रामकत्व बहुकोणाकृतीची दु-

प्यर दर्शवील.

अबकडइफ बहुकोणाकृतीच्या बाजू परिमाणानें व स्थानानें अनेक स्थळीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा दर्शवितात. म्हणजे अब बाजू अ ठिकाणीं अ-ब दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा दर्शविते. बक बाजू ब ठिकाणीं ब क दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा दर्शविते. या प्रमाणें बाकी बाजूही दर्शवितात.



बहुकोणाकृतींत न एक बिंदु घेऊन प्रत्येक प्रेरणेच्या बद्दल्या क-७१सि-८ प्रमाणें न ठिकाणीं तिच्याशीं समान व समांतर अशी प्रेरणा आणि एक युग्म ठेव. म्हणजे न ठिकाणीं बहुकोणाच्या अब, बक ··· ··· बाजूशीं समान व समांतर अशा प्रेरणा येतील. त्या प्रेरणा बहुकोणाच्या सिद्धांता प्रमाणें समतोल असतील. म्हणजे त्यांची परिणामी प्रेरणा शून्य होईल. अनेक युग्माचें एक परिणामी युग्म काढितां येईल व त्याचें भ्रामकत्व अनेक युग्मांच्या भ्रामकत्वा बरोबर असेल परंतु प्रत्येक युग्माचें भ्रामकत्व प्रत्येक प्रेरणेच्या न भोंवतालच्या भ्रामकत्वाबरोबर आहे. म्हणून परिणामी युग्माचें भ्रामकत्व =

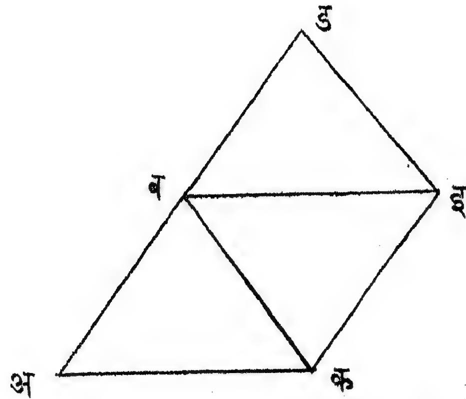
२△अनब + २△बनक + २ कनड ··· ··· ···

म्हणजे बहुकोणाकृतीच्या क्षेत्राच्या दुप्पट आहे. यास्तव बहुकोणाकृतीच्या बाजूंनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणाबरोबर एक युग्म असतें व त्याचें भ्रामकत्व बहुकोणाच्या क्षेत्राच्या दुप-

ट असते.

युग्माचें त्याच्या पातळींतील कोणत्याही बिंदु संबंधीं भ्रामकत्व नित्य सारखें असतें. म्हणून बिंदु आकृतीच्या बाहेर घेतला तरी हरकत नाहीं.

उदाहरण १ — अबक त्रिकोणाच्या अब, बक आणि कअ बाजू परिमाणानें व कार्यमार्गानें तीन प्रेरणा तीन ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या दर्शवितात. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.



अब वाढवून अब = बड कर. बड रेषा अब प्रेरणा दर्शवील ती ब ठिकाणीं कार्य करिते असें समजूं. बक ही ब ठिकाणीं कार्य करिते. बकइड समांतरभुज चौकोन पुरा करून त्यांची परिणामी प्रेरणा बइ काढ. बइ अक अशीं समांतर व समान आहे, म्हणून बइ आणि कअ या प्रेरणा परस्पर समान, समांतर आणि विरुद्ध आहेत म्हणून तें युग्म आहे. वास्तव अब, बक आणि कअ या प्रेरणांबरोबर एक युग्म निघालें. ब पासून कअ वर लंब काढिला तर तो लंब आणि कअ यांच्या गुणाकाराबरोबर म्हणजे त्रिकोणाच्या क्षेत्राच्या दुपटीबरोबर त्या युग्माचें भ्रामकत्व होईल.

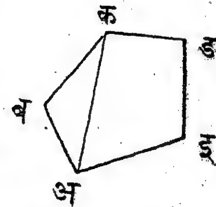
उदाहरण २ — अबक त्रिकोणाच्या अब, बक आणि अक या बाजू परिमाणानें व कार्यमार्गीनें तीन स्थळीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा दर्शवितात. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.

मागील उदाहरणांत सांगितल्या प्रमाणें अब आणि बक यांची परिणामी प्रेरणा बइ काढ. नंतर बइ आणि अक या दोन समान व समांतर प्रेरणा एकाच दिशेनें कार्य करितात, म्हणून त्याची परिणामी प्रेरणा अक च्या दुप्पट असेल आणि अब बाजूच्या मध्यापासून करील.

उदाहरण ३– बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या मध्य बिंदूच्या ठिकाणीं त्यांशीं लंब अशा दिशांनीं अनेक प्रेरणा पदार्थावर कार्य करीत आहेत व त्या बाजूशीं परिमाणानें प्रमाणांत आहेत; तर प्रेरणा बहुकोणाच्या मध्याकडे किंवा मध्यापासून बाहेर कार्य करीत असल्यास त्या समतोल असतात.

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यावर अशा कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात असें मागें एका उदाहरणांत सिद्ध केलें आहे. (प्रकरण ३ उदाहरण ५ पहा.)

अबकडइ या बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या प, फ, ब, भ, म या मध्यांवर त्यांशीं लंब दिशेंत प्रेरणा कार्य करीत आहेत.

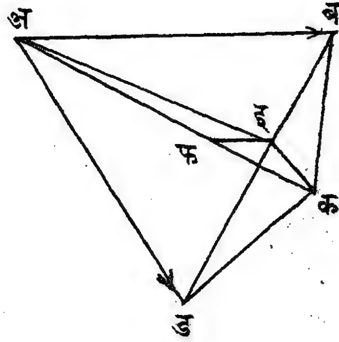


अक आणि अड सांध. अबक त्रिकोणाच्या अब, बक आणि अक बाजूंच्या मध्यांवर त्रिकोणाच्या मध्यापासून बाहेर व बाजूवर लंब अशा दिशांनीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात. म्हणून अब, बक बाजूंच्या मध्यांवर त्रिकोणाच्या मध्यापासून बाहेर कार्य करणाऱ्या प्रेरणा अकच्या मध्यावर व परिमाणानें अक शीं प्रमाणांत अशा त्रिकोणाच्या मध्याकडे कार्य करणाऱ्या प्रेरणे बरोबर आहेत. या करितां अब, बक यांच्या मध्यांवर कार्य करणाऱ्या प्रेरणांच्या जागीं ही प्रेरणा घे. पुनः अकड त्रिकोण घेतला तर अकच्या मध्यावर बाह्य दिशेनें कार्य क-

रणारी ही प्रेरणा व कड, अड यांच्या मध्यांवर बाह्य दिशेनें कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतील म्हणून अक आणि कड यांच्या मध्यावर बाह्य दिशेनें कार्य करणाऱ्या प्रेरणाबरोबर अड वर अडशीं प्रमाणांत अशी अंतर दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा होईल. अडच्या मध्यावर कार्य करणारी ही प्रेरणा आणि अइ, इड यांच्या मध्यावर बाह्य दिशेनें कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समतोल असतात, म्हणून सर्व प्रेरणा समतोल आहेत हें सिद्ध झालें.

याच प्रमाणें अंतर दिशेनें कार्य करणाऱ्या प्रेरणाही समतोल असतात हें दाखवितां येईल.

उदाहरण ४— अबकड ही एक चतुष्कोणाकृति आहे. हिजवर कार्य करणाऱ्या प्रेरणा परिमाणानें व दिशेनें **अब, अड, कब** आणि **कड** बाजू दर्शवितात तर असें सिद्ध करकीं, **अक, बड** कर्णाचे मध्य सांधणाऱ्या दिशेंत यांची परिणामी प्रेरणा कार्य करील व परिमाणानें इच्या चौपट असेल.



बड कर्णाचा मध्य इ आणि **अक** कर्णाचा मध्य फ आहे. अइ, कइ आणि फइ सांध. चारी प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा फइ रेषेंत कार्य करील व तिच्या चौपट परिमाणानें असेल हें सिद्ध करावयाचें. **अब** आणि **अड** यांची परिणामी प्रेरणा अइ दिशेंत कार्य करील व २ अइ बरोबर असेल. तसेंच **कब, कड** यांची परिणामी प्रेरणा **कइ** दिशेंत कार्य करील. व २ कइ बरोबर असेल.

इअ आणि इक यांची परिणामी प्रेरणा इफ दिशेंत कार्य

करील व २ इफ बरोबर असेल. याच प्रमाणें अइ आणि कइ यांचीही परिणामी प्रेरणा फइ दिशेनें कार्य करील. आणि २फई बरोबर असेल. म्हणून २अइ आणि २ कइ यांची परिणामी प्रेरणा४फइ बरोबर होईल.

उदाहरणें.

(१) सजातीय समान. व समांतर प्रेरणा रांबसांच्या तीन कोनबिंदूवर त्याच्या पातळीशीं लंब अशा दिशेंत कार्य करितात. तर चवथ्या कोनबिंदूवर केवढ्या प्रेरणेनें कार्य करावें म्हणजे चारी प्रेरणा एका युग्माबरोबर होतील. जर चवथी प्रेरणा ६०° चा कोन करणाऱ्या दिशेंत कार्य करीत असेल तर युग्माचें भ्रामकत्व काढ.

(२) अबकडइफ हा समभुज षट्कोन आहे. समान प्रेरणा अब, बक, डइ इफ या रेषांच्या दिशांनीं कार्य करीत आहेत. या एका प्रेरणेच्या दुप्पट प्रत्येक प्रेरणा आहे, . अशा दोन समान प्रेरणा डक आणि अफ या रेषांच्या दिशांनीं कार्य करितात. तर त्या समतोल असतील असें सिद्ध कर.

(३) अबकड हा चौरस आहे. ३ शेरांची प्रेरणा अ पासून बकडे, ४ शेरांची ब पासून ककडे, आणि ७ शेरांचीकपासून डकडे, अशा कार्यें करितात, तर यांची परिणामी प्रेरणा काढ?

उ० √२० शेर.

(४) एका समद्विभुज त्रिकोणाच्या बाजूंशीं प्रमाणांत असणारीन प्रेरणा त्रिकोणाच्या तीन बाजूंच्या रेषांत कार्य करितात. समान बाजूंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणा शिरकोनापासून पायाकडे कार्य करणाऱ्या आहेत. तर त्यांची परिणामी प्रेरणा काढ.

उ० पायाच्या मध्यांतून एके बाजूशीं समांतर रेषेंत कार्य करील आणि परिमाण तिच्या दुप्पट असेल.

(५) अबक त्रिकोणाच्या बक, कअ आणि अब बाजूंत न,म,र असे बिंदु घेतले आहेत कीं;

$$\frac{बन}{नक} = \frac{कम}{मअ} = \frac{अर}{रब}$$

तर असें सिद्ध करकीं, न,म,र बाजूंचे मध्य नसतील तेव्हां अन, बम आणि कर रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा एका युग्माबरोबर असतील आणि ते मध्य असतील तेव्हां त्या समतोल असतील.

टीप– कोनबिंदु भोंवतालचीं भ्रामकत्वें घ.

(६) अबक एक त्रिकोणाकार पत्रा आहे. अड, बइ, कफ हे बाजूवर लंब आहेत, तर असें सिद्ध करकीं, बड, कड, कइ, अइ, अफ, बफ या रेषांनीं दर्शविणाऱ्या प्रेरणा पत्र्यावर कार्य करितील तर त्यांची परिणामी प्रेरणा त्रिकोणाच्या भोंवतालच्या वर्तुळाच्या मध्यांतून जाईल.

(७) क,ख,ग,घ या चार प्रेरणा काटकोन चौकोनाच्या बाजूंनीं कार्य करितात, त्यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा काढा.

(८) एका बहुकोणाकृतीच्या एक शिवाय करून बाकी बाजू प्रेरणा दर्शवितात, तर असें दाखवाकीं, त्यांची परिणामी प्रेरणा राहिल्या बाजूशीं समांतर दिशेंत काम करील.

(९) परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांचीं टोकें सांधून जी आकृति बनते तिच्या बाजूंनीं चार प्रेरणा कार्य करीत असतील आणि त्यांचीं परिमाणें व दिशा आकृतीच्या बाजू क्रमानें दर्शवितील तर असें सिद्ध करकीं त्यांची परिणामी प्रेरणा युग्म होईल. आणि त्याचें भ्रामकत्व वरच्या व खालच्या दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रांच्या वजाबाकीच्या दुप्पट असेल.

(१०) अ,ब हे दोन स्थिरबिंदु वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, अब वर्तुळभागांत क हा एक बिंदु घेतला आणि कअ, कब या रेषांत दी-

न प्रेरणा कार्य करण्यास लाविल्या, तर त्यांची परिणामी प्रेरणा समो-रच्या दुसऱ्या वर्तुळभागांतील एका स्थिरबिंदूतून नेहमी जाईल.

(११) मअ, मब या रेषा दोन प्रेरणा आणि नक, नड या रेषा दुसऱ्या दोन प्रेरणा दर्शवितात. मन रेषा अब आणि कड रेषां-स दुभागील तर मात्र चारी प्रेरणा समतोल असतील असें सिद्धक-र.

(१२) चतुष्कोणाकृतींत असा एक बिंदु काढ कीं; त्या पासून कोन-बिंदूपर्यंत रेषा काढिल्या आणि त्यांनीं प्रेरणा दर्शविल्या तर त्या समतो-ल असतील.

(१३) अबकड हा एक चौकोन वर्तुळांत काढलेला आहे प्र, फ, ब या प्रेरणा अब, अड आणि कअ दिशांनीं कार्य करितात आ-णि त्या कड, बक आणि बड शीं प्रमाणांत आहेत. तर त्या स-मतोल आहेत असें सिद्ध कर.

(१४) ज्यांच्या दिशांमध्यें ६०° चा कोन आहे अशा क, क प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा परस्पर लंब दिशांत कार्य करणाऱ्या ख, ख प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणे बरोबर असेल. तर असें सिद्ध करकीं; :-

क : ख : : $\sqrt{२}$: $\sqrt{३}$.

(१५) क आणि ब हे दोन स्थिरबिंदु आहेत. कअ आणि क-ब रेषा दोन प्रेरणा दर्शवितात. जर अ बिंदु एका सरळ रेषेंत सरेल म्ह-णजे त्या रेषेंत कोठेंही अ बिंदु घेतला तर कअ, कब प्रेरणांच्या परि-णामी प्रेरणेचें एक टोंक वरील रेषेशीं समांतर रेषेंत असेल.

प्रकरण ७.

गुरुत्वमध्य.

(७८) प्रत्येक पदार्थ पृथ्वीकडे आकर्षिला जातो. त्याचा प्रत्येक कणही आकर्षिला जातो. यामुळें पदार्थ किंवा द्रव्याचा एकादा कण मोकळा सोडिला कीं तो पृथ्वीवर पडतो. ज्या शक्तीनें हें आकर्षण घडतें त्यास **गुरुत्वाकर्षण** म्हणतात. जें एकंदर आकर्षण घडतें त्यास त्याचें **वजन** किंवा **गुरुत्व** असें म्हणतात. पदार्थाचा प्रत्येक कण ज्या जोरानें पृथ्वीकडे ओढिला जातो. त्या सर्व जोरांची जी बेरीज तें त्या सर्व पदार्थाचें वजन होय. म्हणजे त्या सर्व जोरांची, किंवा प्रेरणांची जी परिणामी प्रेरणा तें त्याचें वजन होय.

ज्या दिशेनें पदार्थाचे कण पृथ्वीकडे आकर्षिले जातात, म्हणजे कोणत्याही स्थळीं ज्या दिशेनें मोकळा पदार्थ पडेल, ती त्या स्थळाची **दिक्रेषा** म्हणजे लंब रेषा समजावी. त्या स्थळीं ओळंबा या दिशेनें स्थिर राहतो. ही दिक रेषा स्थिर पाण्याच्या पातळीशीं लंब असते.

दिक् रेषेशीं काटकोन करणारी जी पातळी तिला **क्षितिजपातळी** असें म्हणतात.

कण पृथ्वीच्या मध्याकडे आकर्षिले जातात. व पृथ्वी गोलाकार आहे म्हणून सर्व **दिक्रेषा** पृथ्वीच्या मध्याकडे वळतील. यास्तव वस्तुतः ज्या दिशेनें पृथ्वीकडे पदार्थ आकर्षिले जातात त्या सर्व दिशा परस्पर समांतर नसतात. परंतु पृथ्वीच्या आकाराच्या व तिच्या त्रिज्येच्या मानानें पदार्थ इतके लहान असतात कीं त्यांचे कण ज्या दिशांनी पृथ्वीकडे आकर्षिले जातात, त्या दिशा बहुतेक समांतरच असतात; आणि घटक कणांवरील आकर्षणांच्या बेरजेबरोब-

र सर्व पदार्थावरील आकर्षण असतें, म्हणजे सर्व पदार्थाचें वजन घटक भागांच्या वजनांच्या बेरजेबरोबर असतें.

पदार्थाच्या कणाचीं वजनें म्हणजे एकाच दिशेकडे कार्य करणाऱ्या अनेक समांतर प्रेरणा होत. अशा समांतर प्रेरणांस सर्वदां मध्य असतो. त्या मध्यावर सर्व समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा म्हणजे सर्व पदार्थाचें वजन कार्य करील; म्हणून त्या बिंदूस त्या पदार्थाचा **गुरुत्वमध्य** असें म्हणतात.

पदार्थ मोकळा सोडिला असतां या गुरुत्व मध्यांतून जाणाऱ्या दिक् रेषेंतून पदार्थ खालीं पडेल म्हणून जर गुरुत्वमध्यांत उलट दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा लाविली व ती पदार्थास खालीं पडूं देणार नाहीं, तर सर्व पदार्थ तोलला जाईल. पदार्थ कसाही धरिला तरी गुरुत्वमध्य बदलत नाहीं. या करितां गुरुत्वमध्यांत पदार्थ तोलून धरिल्यावर तो कसाही वांकडा तिकडा झाला तरी तोलला राहील.

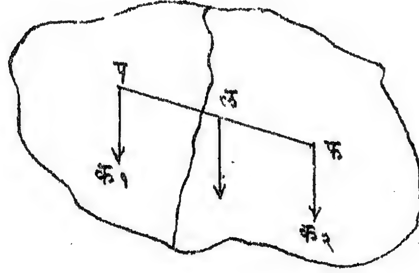
ज्या प्रमाणें एका पदार्थाचे कण एकमेकांस दृढ जोडलेले असतात तसे अनेक पदार्थ जर एकमेकांशीं दृढ जोडलेले असतील, तर त्या पदार्थ समूहाचाही गुरुत्वमध्य असेल. कारण त्या पदार्थांच्या गुरुत्वमध्यांतून कार्य करणाऱ्या प्रेरणा समांतर असतील व त्यांस मध्य असेल. म्हणून हा मध्य तोलून धरिल्यानें पदार्थसमूह तोलला जाईल. यास्तव गुरुत्वमध्याची व्याख्या अशी देतात.

प्रत्येक पदार्थ किंवा पदार्थसमूह यांमध्यें असा एक बिंदु असतो कीं, तो बिंदु तोलून धरिला असतां सर्व पदार्थ किंवा पदार्थसमूह तोलला जातो. त्यास त्या पदार्थाचा किंवा पदार्थ समूहाचा **गुरुत्वमध्य** असें म्हणतात.

(७९) गुरुत्वविशिष्ट अशा दोन कणांचा गुरुत्वमध्य काढणें.

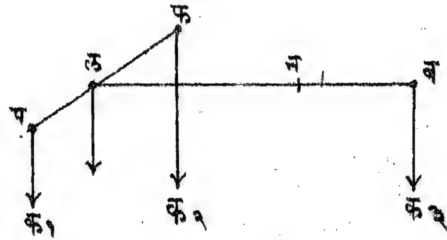
क$_1$, क$_2$ या वजनाचे दोन कण प, फ, ठिकाणीं आहेत.

क$_1$,क$_2$ वजनाचे दोन कण म्हणजे क$_1$ आणि क$_2$ या दोन समांतर प्रेरणा प,फ ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या होत. म्हणून प,फ सांधून पफ रेषेचे ल स्थळीं असे विभाग कर कीं पल: फल : : क$_2$: क$_1$ म्हणजे ल हा त्यांचा मध्य झाला. ल मधून या दोहोंची परिणामी प्रेरणा जाईल म्हणून जर क$_1$ आणि क$_2$ गुरुत्वशून्य अशा दृढ कांबीनें जोडले असल्यास ल बिंदु तोलून धरिल्यास दोन्ही कण तोलले जातील. म्हणून ल, क$_1$ आणि क$_2$ यांचा गुरुत्वमध्य झाला.



(८०) अनेक कणांचा गुरुत्वमध्य काढणें.

क$_1$,क$_2$,क$_3$,क$_4$ इत्यादि वजनाचे कण प, फ,ब,भ या ठिकाणीं आहेत. म्हणजे क$_1$, क$_2$,क$_3$ क$_4$ इत्यादि समांतर प्रेरणा त्या बिंदुस्थळीं कार्य करीत आहेत. या प्रेरणांचा मध्य मागें सांगितल्या प्रमाणें काढिला तर न हा होईल तर न हाच त्यांचा गुरुत्वमध्य आहे. कारण या सर्व प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा म्हणजे सर्व कणांच्या वजनाच्या बेरजेएवढें वजन न पासून कार्य करील. यास्तव जर सर्व कण न शीं गुरुत्वशून्य अशा सळ्यांनीं जोडले असतील, तर न तोलून धरिला म्हणजे सर्व कण तोलले जातील.



(८१) यावरून गुरुत्वविशिष्ट अशा कोणत्याही कणांचा समूह असला तरी त्यास गुरुत्वमध्य असेल. कारण सर्व कण एकाच दिशेनें पृथ्वीकडे आकर्षिले जात असल्यानें तितक्या एकाच दिशेस कार्य करणाऱ्या समांतर प्रेरणा असतात. अशा प्रेरणांस नेहमीं परिणामी प्रेरणा असते. व ती इतर प्रेरणांशीं समांतर असते.

कणसमूहाचें परिणामी वजन नेहमी गुरुत्व मध्यांतून कार्य करितें म्हणून कोणत्याही पदार्थाचें सर्व वजन गुरुत्वमध्यांतच जमलेलें आहे. असें मानण्यास हरकत नाहीं. ज्यापेक्षां अनेक प्रेरणांच्या जागीं त्यांची परिणामी प्रेरणा ठेविली असतां कार्य मूळच्या इतकेंच होतें त्यापेक्षां समतोलपणा राखण्यांत गुरुत्वविशिष्ट अशा पदार्थाचें कसें कार्य घडत आहे याचा विचार करणें असेल तेव्हां पदार्थाच्या वजनाएवढी प्रेरणा गुरुत्व मध्यांतून कार्य करीत आहे असें समजण्यास हरकत नाहीं.

(८२) प्रत्येक पदार्थास किंवा पदार्थसमूहास एकच गुरुत्व मध्य असतो.

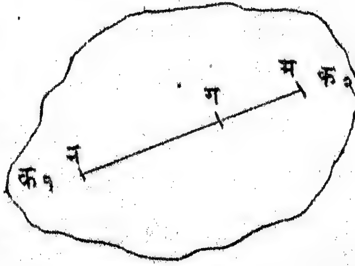
पदार्थास दोन गुरुत्वमध्य आहेत असें कल्पू. पदार्थ हवा तसा फिरविला तरी गुरुत्वमध्य बदलत नाहीं. दोनही गुरुत्वमध्य क्षितिजाशीं समांतर अशा पातळींत येतील असा पदार्थ फिरवावा.

प्रत्येक पदार्थावर किंवा पदार्थ समूहावर गुरुत्वाकर्षणामुळें एकाच दिशेनें कार्य करणाऱ्या अनेक समांतर प्रेरणा असतात. त्यांची परिणामी प्रेरणा एकच असून ती एकाच बिंदूतून कार्य करिते. मूळच्या प्रेरणा दिक् रेषेंत कार्य करणाऱ्या होत्या म्हणून त्यांची परिणामी प्रेरणा दिक् रेषेंतच कार्य करील. दिक् रेषा क्षितिज पातळीशीं लंब असते. आम्हीं दोन गुरुत्वमध्य कल्पिले आहेत. पदार्थ खालीं एकाच दिशेनें म्हणजे दिक् रेषेंत पडेल. दोन गुरुत्वमध्य आहेत म्हणून ही एक दिक् रेषा क्षितिजाशीं समांतर अशा पातळींतील दोन बिंदूंमधून जाते.

असें होतें. असें होणें अशक्य आहे. यास्तव एकाहून जास्त गुरुत्वमध्य असूं शकणार नाहींत.

(८३) पदार्थाच्या किंवा पदार्थसमूहाच्या दोन खंडांचें गुरुत्वमध्य दिले असल्यास सर्वांचा गुरुत्वमध्य काढणें.

$क_1$ व $क_2$ या दोन खंडांचे गुरुत्वमध्य न आणि म आहेत सर्वांचा गुरुत्वमध्य काढणें. म्हणजे न, म ठिकाणीं कार्य करणाऱ्या $क_1, क_2$ प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेचा कार्य करण्याचा बिंदु काढणें आहे. नम सांधून तिचे ग ग स्थळीं असे विभाग कर कीं,



$$\frac{क_1}{क_2} = \frac{मग}{गन}$$

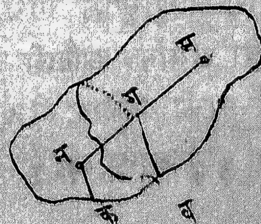
म्हणजे ग हा $क_1$ व $क_2$ यांचा मध्य झाला. म्हणून सर्व $क_1 + क_2$ पदार्थांचा ही गुरुत्वमध्य झाला.

(८४) सर्व पदार्थाचा आणि त्यांच्या एका खंडाचा असे गुरुत्वमध्य दिले असल्यास बाकी राहिल्या खंडाचा गुरुत्वमध्य काढणें.

व हें सर्व पदार्थाचें वजन आहे. एका खंडाचें क वजन आहे तर राहिल्या खंडाचें व − क झालें. म्हणून व ही क आणि व − क या दोन समांतर प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा आहे. व आणि क यांचे गुरुत्वमध्य ग, न आहे. गन सांधून ती रेषा ग कडे इतकी वाढीव कीं,

$$\frac{क}{व - क} = \frac{गम}{गन}$$

$$गम = \frac{क}{व - क} \times गन.$$



(८५.) सरळ रेषेचा गुरुत्वमध्य काढणें.

या स्थळीं सरळरेषा भूमितींतील केवळ दोन बिंदुमधील अंतर दर्शविणारी नसून समरूप अशी द्रव्य रेषा घेणें आहे. समरूप द्रव्यमय रेषा म्हणजे बारीक तार किंवा कांब जिची सर्वत्र लांबी रुंदी जाडी सारखी आहे.

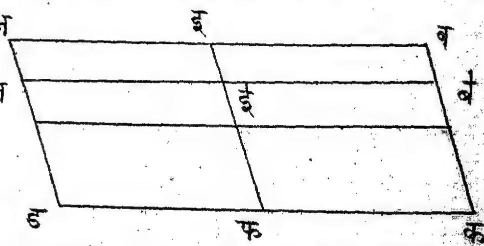
अ ——— प ——— क ——— फ ——— ब

अशा समरूप द्रव्यमय रेषेचा जो मध्य तोच तिचा गुरुत्वमध्य असतो. समजा कीं, अ ब ही एक रेषा आहे.

ही रेषा समरूप द्रव्यमय रेषा अनेक सारख्या कणांची बनलेली असते. आतां रेषेच्या क मध्य बिंदूपासून सारख्या अंतरावरचे कोणतेही दोन कण प, फ घेतले तरी कण सारखे असल्यानें त्यांचा गुरुत्वमध्य क मध्यबिंदु असेल यास्तव सर्व रेषेचा गुरुत्वमध्यही मध्य बिंदु होईल.

(८६.) समांतरभुज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य काढणें.

येथें समांतर भूज चौकोन म्हणजे समरूप द्रव्यमय समांतरभूज चौकोन घेणेंचा, म्हणजे ज्याची जाडी अत्यंत कमी पण सर्वत्र सारखी आहे, असा समांतरभूज चौकोनाकार पत्रा समजावयाचा.



अबकड हा समांतर चौकोन आहे. याच्या अब आणि कड बाजू इ आणि फ स्थळीं दुभाग आणि इफ सांध, आतां अबशीं दुसरी कोणती ही अंईबं रेषा समांतर काढिली तरती अड इफ आणि कड रेषांस अंई बं स्थळीं मिळेल. ती ई स्थळीं इफ रेषेनें दुभागली जाईल. कारण डई आणि कई हे समांतरभूज चौकोन होतात म्हणून

अई = बई.

या प्रमाणें कोणतीही अड, बक रेषांनी मर्यादित अशी अबशीं समांतर रेषा काढिली; तरी ती इफ रेषेनें दुभागली जाईल. म्हणून अशा प्रत्येक रेषेचा गुरुत्वमध्य तिचा मध्य बिंदु असेल.

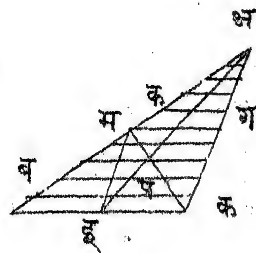
अबकड समांतरभुज चौकोन समरूप, द्रव्यमय आणि अबशीं समांतर अशा रेषांचा बनलेला आहे. अशा प्रत्येक रेषेचा गुरुत्वमध्य तिचा मध्य बिंदु असतो. हा मध्य बिंदु इफ रेषा तिला ज्या स्थळीं मिळते, त्या स्थळीं असतो. यास्तव सर्व समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य इफ रेषेंत आहे असें झालें.

याच प्रमाणें अड आणि बक यांस दुभागून ते बिंदु सांधिले तर त्या रेषेंतही समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य असेल. ज्यापेक्षां इफ रेषेंत व या रेषेंत गुरुत्वमध्य आहे, त्यापेक्षां या दोन रेषा ज्या स्थळीं परस्पर छेदितील, तो छेदनबिंदु सर्व समांतरभूज चौकोनाचा गुरुत्वमध्य होईल.

यास्तव समांतरभूज चौकोनाच्या समोरा समोरच्या बाजूंचे मध्य सांधणाऱ्या रेषा ज्या बिंदूंत छेदितील तो बिंदु चौकोनाचा गुरुत्व मध्य असतो.

(८७) त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढणें.

अबक हा त्रिकोणाकार समरूप असा पत्रा आहे. बक बाजू इ स्थळीं दुभागून अइ सांध. अक बाजूंत कोठेंही फ बिंदु घेऊन तेथून बकशीं फग समांतर रेषा काढिली, ती न बिंदूंत अइस फग मिळत, तर न बिंदूंत अइनें दुभागिली जाईल.



कारण अबइ आणि अफन, हे त्रिकोण आणि अकइ आणि

अगन, हे त्रिकोण सरूप आहेत.

∴ (यु· बु· ६, सि· ४) $\frac{फन}{बइ} = \frac{अन}{अइ}$

$\frac{गन}{कइ} = \frac{अन}{अइ}$

∴ $\frac{फन}{बइ} = \frac{गन}{कइ}$

कइ = बइ; ∴ फन = गन.

म्हणून फग चा न मध्य बिंदु आहे म्हणून तोच त्या रेषेचा गुरुत्व मध्य आहे. या प्रमाणें बक शीं अब रेषेंत बिंदु घेऊन कोणतीही समांतर रेषा अक नें मर्यादित अशी काढिली, तर ती अई नें दुभागिली जाईल.

अबक, हा त्रिकोण बक शीं समांतर अशा अनेक रेषांचा बनला आहे त्या सर्व रेषांचे मध्य अइ रेषेंत आहेत म्हणून सर्व त्रिकोणाचा मध्य अइ रेषेंत असला पाहिजे.

या प्रमाणें जर अब, म स्थळीं दुभागून कम बिंदु सांधिले आणि अबशीं अक, बकनीं मर्यादित अशा समांतर रेषा काढिल्या, तर त्याही कम रेषेनें दुभागिल्या जातील. म्हणून सर्व त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य कम रेषेंत असेल.

आतां ज्यापेक्षां त्रिकोणाचा मध्य अइ रेषेंत आहे व कम रेषेंत आहे त्यापेक्षां या दोन रेषा ज्या प बिंदूंत छेदितील तोच बिंदु त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य होईल.

प बिंदूचें म्हणजे त्रिकोणाच्या गुरुत्वमध्याचें अ पासून किंवा इ पासून अंतर किती असतें तें काढूं

मइ सांध, मइ रेषा अकशीं समांतर आहे. (यु· बु· ६, सि· २)

अपक आणि इमई हे त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{\text{इप}}{\text{इम}} = \frac{\text{अप}}{\text{अक}}$$

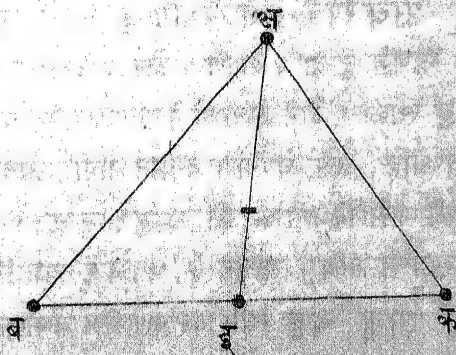
$$\therefore \frac{\text{इम}}{\text{अप}} = \frac{\text{इम}}{\text{अक}} = \frac{\text{बइ}}{\text{बक}} = \frac{1}{2}$$

यास्तव अप रेषा इप च्या दुप्पट आहे, म्हणून सर्व अइ रेषा इपच्या तिप्पट झाली. म्हणून प म्हणजे त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य इ पासून अइ च्या तृतीयांश अंतरावर असतो. या करितां त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढणें झाल्यास असा काढावा. त्रिकोणाची एक बाजू दुभागून तो बिंदु व त्या बाजूसमोरचा कोनबिंदु सांधावे. दुभागलेल्या बाजूपासून या रेषेच्या तृतीयांश लांबीवर त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य असतो.

प गुरुत्वमध्य अ, ब, क या कोनबिंदूंशीं सांधिल्यानें जे तीन अपब, बपक आणि अपक त्रिकोण पडतात ते परस्पर समान असतात. आणि प्रत्येक सर्व त्रिकोणाचा तृतीयांश असतो. कारण बइ = कइ ∴ △ अबइ = △ अकइ आणि △ बपइ = △ कपइ ∴ △ अबप = △ अकप तसेंच अम = बम ∴ △ अपक = △ बपक.

(८९) त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांवर तीन साररव्या वजनांचे पदार्थ ठेविले तर त्यांचा गुरुत्वमध्य व त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य हे एकच असतात.

अबक त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांवर तीन साररव्या वजनाचे पदार्थ ठेविले आहेत असें समजूं. बक, इ स्थळीं दुभागून अइ सांध.



ब,क बिंदूंवरील दोन सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य **इ** स्थळीं असेल, आतां **इ** स्थळीं दोन पदार्थ आहेत, व **अ** स्थळीं एक पदार्थ आहे. यांचा गुरुत्वमध्य **अइ** रेषेंत असला पाहिजे. **अइ** चे **प** स्थळीं असे दोन विभाग करकीं, **अप : इप : : २ : १.** म्हणजे **प** हा **अबक** ठिकाणच्या तीन सारख्या वजनाच्या पदार्थांचा गुरुत्व मध्य झाला. परंतु वरच्या सिद्धांतावरून **प** हा त्रिकोणाचाही गुरुत्वमध्य आहे.

या प्रमाणें समांतर भुज चौकोन किंवा चौरस यांच्या कोनबिंदूंवर सारख्या वजनाचे पदार्थ ठेविले, किंवा सरूप म्हणजे एकाच दिशेनें कार्य करणाऱ्या प्रेरणा लाविल्या, तर त्यांचा मध्य व आकृतीचा मध्य हे एकच असतात, हें सिद्ध करितां येईल.

परंतु जर भिन्न वजनाचे पदार्थ किंवा भिन्न जोराच्या प्रेरणा कोनबिंदूंवर असतील, तर त्यांचा गुरुत्वमध्य निराळा असतो व तो सहज काढितां येतो. तसलीं दोन उदाहरणें देतों.

उदाहरण १— अबक त्रिकोणाच्या कोनबिंदूंवर चार, पांच आणि सहा शेर वजनाचे तीन पदार्थ ठेविले आहेत, तर त्यांचा गुरुत्व मध्य काढ.

तीन कोन बिंदूंवर ४, ५, ६ शेर वजनाचे पदार्थ ठेविले आहेत. याचा अर्थ या तीन बिंदूंवर ४, ५, ६ शेर जोरांच्या तीन सरूप समांतर प्रेरणा कार्य करीत आहेत. आणि त्यांचा मध्य काढणें आहे.

अब रेषेचे असे विभाग **ड** स्थळीं करकीं, **अड : बड : : ५ : ४** म्हणजे **ड** हा ४ आणि ५ शेर वजनांच्या पदार्थांचा मध्य झाला म्हणून **ड** स्थळीं ९ शेर जोराची प्रेरणा ४ व ५ या प्रेरणांच्या बदला कार्य करीत आहे, असें घेण्यास हरकत नाहीं. आतां **कड** सांध आणि **कड** चे **इ** स्थळीं असे विभाग करकीं, **कड : डइ : : ९ : ६**, म्हणजे **इ** हा ६ व ९ या प्रेरणांचा मध्य, म्हणून ४, ५, व ६ या तिहींचा मध्य झाला.

अइ, बइ सांध तर खालील प्रमाण नित्य असतें ४ : ५ : ६.

कइब : कइअ : : अइब, कारण.

कडब : कडअ : : बड : अड : : ४ : ५.

बइड : अइड : : बड : अड : : ४ : ५

∴ कइब : कइअ : : ४ : ५.

या प्रमाणें तिसरेंही प्रमाण सिद्ध होईल.

(८९) सारख्या जाडीची कांब किंवा तार वांकवून एक त्रिकोण केलेला आहे. त्याचा गुरुत्वमध्य काढणें आहे अशा त्रिकोणाच्या गुरुत्वमध्यास त्रिकोणाच्या परिमिताचा गुरुत्वमध्य असें म्हणतात.

अबक हा असला त्रिकोण आहे. **अब, बक, अक.** यातीन सरूप द्रव्यमय रेषा आहेत. यांचे जे मध्यबिंदु तेच त्यांचे गुरुत्वमध्य होतील. **ड,इ,फ** हे त्यांचे मध्य आहेत त्या ठिकाणीं त्यांच्या बाजूचीं वजनें कार्य करितील त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य काढणें म्हणजे **ड,इ,फ** ठिकाणच्या तीन वजनांचा गुरुत्वमध्य काढणें आहे. हीं तीन वजनें बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत.

ड : इ : फ : : अब : बक : अक.

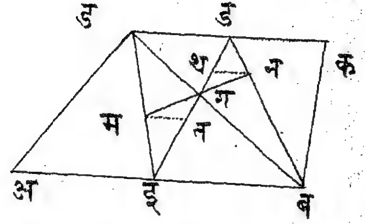
डइ. इफ आणि **डफ** सांध, **फडइ** आणि **डइफ** कोनांस दुभागणाऱ्या **डम** आणि **इन** रेषा काढ. (यु॰ पु॰ ६, सि॰ ३)

डन : फन : : डइ : फइ : : अक : अब : : फ : ड

∴ **न** हा **ड** आणि **फ**, या वजनाचा म्हणजे **अब अक,** या बाजूचा गुरुत्वमध्य झाला. तेव्हां तिहींचा गुरुत्वमध्य **इन** रेषेंत असेल. तसेंच तिहींचा गुरुत्वमध्य **डम** रेषेंत असला पाहिजे. म्हणून **डम** व **इन** ज्या ठिकाणीं परस्परांस छेदितील तो गुरुत्वमध्य होईल. परंतु हा बिंदु **डइफ** त्रिकोणांत काढलेल्या वर्तुळाचा मध्य बिंदु असतो म्हणून त्रिकोणाच्या परिमितीचा गुरुत्वमध्य त्याच्या बाजूंचे मध्य सांधून जो त्रिकोण होतो त्यांतील वर्तुळाचा मध्यबिंदु असतो.

(९०) ट्रापिज्यमचा गुरुत्वमध्य काढणें.

अबकड हा ट्रापिज्यम आहे. याच्या अब आणि कड बाजू परस्पर समांतर आहेत. अब व कड यांस इ व ह या बिंदुस्थळीं दुभाग आणि हइ सांध. अबशीं समांतर आणि अड व बक या बाजूंनीं मर्यादित अशी कोणतीही समांतर रेषा काढिली तरी ती हइ रेषेनें दुभागिली जाईल. अबकड हा ट्रापिज्यम अबशीं समांतर अशा रेषांचा बनला आहे व त्या सर्व रेषांचे गुरुत्वमध्य हइ रेषेंत आहेत म्हणून सर्व ट्रापिज्यमचा गुरुत्वमध्यही हइ रेषेंत कोठें तरी असला पाहिजे.



डइ आणि बह सांध. $\frac{डइ}{३}$ = इम, आणि $\frac{बह}{३}$ = हन. कर म्हणजे म आणि न हे अबड आणि बकड या त्रिकोणांचे गुरुत्वमध्य झाले. म्हणून साऱ्या आकृतिचा गुरुत्वमध्य मन रेषेंत असला पाहिजे. परंतु आम्हीं वर सिद्ध केलेंच आहे कीं, तो हइ रेषेंतही आहे. म्हणून मन व हइ ज्या बिंदूंत परस्पर छेदितील तो बिंदु सर्व आकृतीचा गुरुत्वमध्य होईल.

मन व हइ या रेषा ग स्थळीं छेदितात म्हणून ग हा अबकड ट्रापिज्यमचा गुरुत्वमध्य आहे. आतां गइचा अब कड आणि हइ यांशीं कसा संबंध असतो तो काढूं.

म आणि न पासून मत आणि नथ या अब किंवा कड शीं समांतर काढ. त्या त आणि थ स्थळीं हइस मिळतात. गइ = क्ष, गह = य आणि अब = ट व कड = घ असे धर.
मत आणि नथ या रेषा डह व बइ यांशीं समांतर आहेत.

∴ मत : डह : : इम : इड : : १ : ३

नथ : बइ : : हन : बह : : १ : ३

∴ मत = $\frac{१}{३}$ डह = $\frac{१}{६}$ कड = $\frac{१}{६}$ घ.

नथ = $\frac{1}{3}$ बइ = $\frac{1}{6}$ अब = $\frac{1}{6}$ ठ.

मतग आणि नथग हे त्रिकोण सरूप आहेत म्हणून.

गत : गथ :: मत : नथ :: $\frac{1}{6}$ कड : $\frac{1}{6}$ अब :: घ : ठ

$$\left.\begin{array}{l}\text{गत} = \text{गइ} - \text{इत.}\\ \text{गथ} = \text{गह} - \text{हथ.}\end{array}\right\}\text{आणि}\left\{\begin{array}{l}\text{इत} = \frac{1}{3}\ \text{हइ} = \frac{1}{3}(\text{क्ष} + \text{य})\\ \text{हथ} = \frac{1}{3}\ \text{इह} = \frac{1}{3}(\text{क्ष} + \text{य})\ \text{इत=हथ.}\end{array}\right.$$

$$\therefore \frac{\text{गत}}{\text{गथ}} = \frac{\text{गइ} - \text{इत}}{\text{गह} - \text{हथ}} = \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{3}(\text{क्ष} + \text{य})}{\text{य} - \frac{1}{3}(\text{क्ष} + \text{य})} = \frac{\text{२क्ष} - \text{य}}{\text{२य} - \text{क्ष}} = \frac{\text{मत}}{\text{नथ}} = \frac{\text{घ}}{\text{ठ}}.$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{ठ} + \text{२घ}}{\text{२ठ} + \text{घ}}. \quad ; \quad \text{य} = \text{हइ} - \text{क्ष}.$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{हइ} - \text{क्ष}} = \frac{\text{ठ} + \text{२घ}}{\text{२ठ} + \text{घ}}.$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{हइ}} = \frac{\text{ठ} + \text{२घ}}{\text{३}(\text{ठ} + \text{घ})} \therefore \text{क्ष} = \text{गइ}\ \frac{\text{हइ}}{\text{३}} \times \frac{\text{अब} + \text{२कड}}{\text{अब} + \text{कड}}.$$

(९१) त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणें.

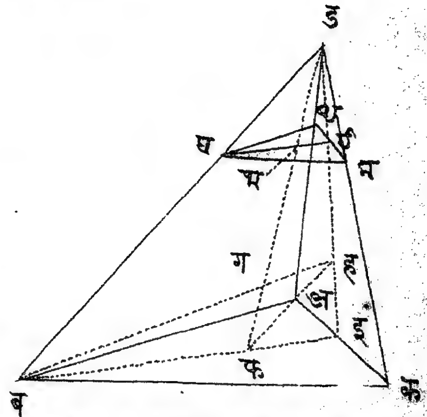
त्रिकोणाकार शंकूचा अबक त्रिकोण हा पाया आहे. आणि ड हा त्याचा शिरकोण आहे.

अक बाजू इ स्थळीं दुभाग आणि बइ आणि डइ सांध. बइ रेषेंत फ असा बिंदु घे कीं, फइ = $\frac{1}{3}$ बइ होईल. म्हणजे फ हा अबक त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य झाला. तसेंच डइ रेषेंत ह असा बिंदु घे कीं, इह = $\frac{1}{3}$ डइ होइल म्हणजे ह हा अकड त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य झाला. आतां डफ आणि बह सांधिल्यास या दोन रेषा ग स्थळीं मिळतील तर ग हा त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य होईल.

डब रेषेंत घ हा बिंदु घे. आणि त्यापासून घम आणि घथ या बक आणि अब, यांशीं समांतर रेषा काढ. त्या अकड पातळीस म आणि ठ स्थळीं मिळतात. ठम सांध तर ठम रेषा अ-

क शीं समांतर होईल.

कारण अबक पातळीशीं थघम्न पातळी समांतर आहे. या दोन समांतर पातळ्यांस अकड पातळी मिळते म्हणून अकशीं थम्न समांतर आहे.



डफ रेषा थघम्न पातळीस प्म स्थळीं मिळते. घप्म वा-
ध आणि डई स ठ स्थळीं मिळेपर्यंत वाढीव.

तसेंच घठ आणि बइ या रेषा एका बइड पातळींत अ-
सून अबक आणि थघम्न समांतर पातळ्यांत आहेत म्हणून
घठ आणि बइ, याही समांतर आहेत.

डम्नठ आणि डकइ सरूप आहेत, तसेंच डथठ आणि ड-
अई सरूप आहेत कारण अकशीं थठ समांतर आहे.

$$\therefore \frac{\text{डठ}}{\text{डइ}} = \frac{\text{ठम्न}}{\text{इक}} = \frac{\text{थठ}}{\text{अइ}}$$

$$\therefore \text{अइ} = \text{कइ} \quad \therefore \text{ठम्न} = \text{थठ}$$

डघप्म आणि डबफ, तसेंच डप्मठ आणि डफइ हे त्रि-
कोण सरूप आहेत. कारण घठ रेषा बइशीं समांतर आहे.

$$\therefore \frac{\text{घप्म}}{\text{बफ}} = \frac{\text{डप्म}}{\text{डफ}} = \frac{\text{ठप्म}}{\text{इफ}}$$

$$\therefore \frac{\text{घप्म}}{\text{ठप्म}} = \frac{\text{बफ}}{\text{इफ}} = \frac{2}{1} \therefore \quad \text{घप्म} = २\,\text{ठप्म}.$$

यास्तव प्म हा थघम्न त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य आहे.
या प्रमाणें अबक पायाशीं समांतर आणि शंकूच्या ति-

हीं पातळ्यांनीं मर्यादित अशी दुसरी पातळी घेतली, तरी त्या पातळीच्याज्या बिंदूंतून डफ जाईल तो बिंदु तिचा गुरुत्वमध्य होईल.

अबकड शंकु **अबक** पायाशीं समांतर अशा अनेक पातळ्यांच्या बनला आहे. आणि प्रत्येक पातळीच्या गुरुत्वमध्यांतून **डफ** जाते. यास्तव सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य **डफ** रेषेंत असला पाहिजे.

अकड त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य **ह** आहे. **ब** शिरकोन समजून जर **बह** सांधिले तर **अकड** शीं समांतर आणि **अबक, डबअ** आणि **डबक** या पातळ्यांनीं मर्यादित अशा प्रत्येक पातळीच्या गुरुत्वमध्यांतून **बह** जाईल. तसल्या पातळ्यांचा सर्व शंकु बनला आहे. म्हणून सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य **बह** रेषेंत आहे.

सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य **डफ** रेषेंत आहे आणि **बह** रेषेंत आहे म्हणून **डफ** आणि **बह** या रेषा ज्या बिंदूंत छेदितील तो शंकूचा गुरुत्वमध्य होईल. त्या रेषा ग बिंदूंत मिळतात म्हणून ग हा शंकूचा गुरुत्वमध्य होय.

फह सांध तर **फह, बड** शीं समांतर आहे. (पु॰ पु॰ ६ सि॰ २) म्हणून **बगड** आणि **गफह** त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{गह}{हफ} = \frac{बग}{बड}$$

$$\frac{हग}{बग} = \frac{हफ}{बड} = \frac{डफ}{बड} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{हग}{हग + बग} = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{हग}{बह} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad हग = \frac{1}{4} बह.$$

यास्तव **हग** भाग **बह**च्या चतुर्थांशाबरोबर आहे. यास्तव शंकूच्या पायाचा गुरुत्वमध्य काढून शिरकोनाशीं सांधावा त्या रेषेचा पा-

यापासून चतुर्थांश घ्यावा. त्या स्थळीं शंकूचा गुरुत्वमध्य असतो.

(९२) त्रिकोणाकार शंकूच्या चारी कोनबिंदूंवर चार सारख्या वजनाचे पदार्थ ठेविले तर त्यांचा गुरुत्वमध्य आणि शंकूचा गुरुत्व मध्य हे एकच असतील.

अबकड या शंकूच्या अ, ब, क, ड या कोन बिंदूंवर चार सारख्या वजनाचे पदार्थ ठेविले आहेत.

अ,ब,क या तीन सारख्या वजनाच्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य व अबक त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य एकच असतील.

(क. ८८ पहा) तो गुरुत्वमध्य फ आहे.

अ,ब,क ठिकाणीं तीन सारखे पदार्थ ठेविले किंवा फ ठिकाणीं एकाच्या तिपट वजनाचा पदार्थ ठेविला तरी परिणाम सारखाच होईल.

आतां ड ठिकाणीं एक पदार्थ आणि फ ठिकाणीं त्याच्या तिप्पट वजनाचा पदार्थ यांचा गुरुत्वमध्य काढिला. म्हणजे तोच चारीकोनांवरील चार सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य होईल.

डफ सांध आणि डफचे ग स्थळीं असे दोन विभाग करकीः-

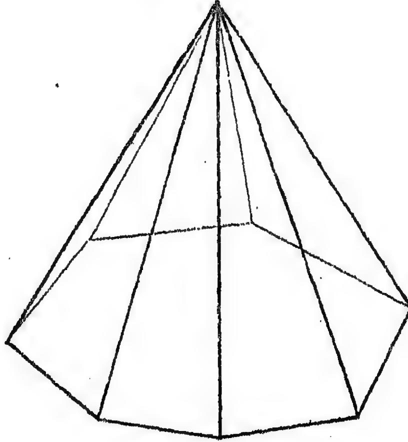
$$\frac{फग}{डग} = \frac{१}{३}$$

म्हणजे ग हा चार सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य झाला. परंतु शंकूचाही गुरुत्वमध्य हाच असतो यास्तव शंकूचा आणि त्याच्या चार कोनांवरील चार सारख्या पदार्थांचा गुरुत्वमध्य एकच असतात.

(९३) ज्या शंकूचा पाया बहुकोणाकृति आहे अशा शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणें.

शंकूच्या पायांत एक बिंदु घेऊन तो बिंदु आणि शिरकोन व पायाचे कोनबिंदु सांधिले तर बहुकोणाकार शंकूचे अनेक त्रिकोणाकार शंकु होतील.

प्रत्येक त्रिकोणाकार शंकूचा गुरुत्वमध्य शिरकोन व पाया यांमधील अंतराच्या पायापासून चतुर्थांश अंतरावर पायाशीं समांतर अशा पातळींत असेल. तसेंच पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणाऱ्या रेषेंत सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य असेल. कारण पायाशीं समांतर आणि शंकूच्या बाजूनीं मर्यादित अशा अनेक पातळ्यांचा शंकू बनला आहे. या सर्वांच्या गुरुत्वमध्यांतून पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणारी रेषा जाईल. या करितां सर्व शंकूचा गुरुत्वमध्य या रेषेंत असला पाहिजे.



या करितां ही रेषा गुरुत्वमध्य असणाऱ्या पातळीस ज्या ठिकाणीं मिळेल तो शंकूचा गुरुत्वमध्य होईल. परंतु ही पातळी पायापासून शिरकोनाच्या अंतराच्या चतुर्थांश अंतरावर आहे म्हणून शंकूचा गुरुत्वमध्य पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणाऱ्या रेषेंत पायापासून तिच्या चतुर्थांश अंतरावर असेल.

(१४) गोल शंकूचा गुरुत्वमध्य काढणें.

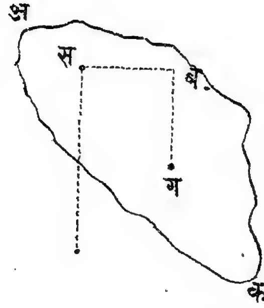
गोल शंकूचा पाया वर्तुळ असतो. वर्तुळ म्हणजे अनंतबाजूंची बहुकोणाकृति आहे. यास्तव वरील सिद्धता येथें ही लागू पडेल. यास्तव गोल शंकूचाही गुरुत्वमध्य पायाचा गुरुत्वमध्य आणि शिरकोन यांस सांधणाऱ्या रेषेंत पायापासून तिच्या चतुर्थांश अंतरावर असेल.

(१५) जर एक पदार्थ एका बिंदूपासून टांगिला व त्या बिंदुभोंव-

ती फिरण्यास त्यास मोकळीक असली तर जेव्हां त्या बिंदूतून जाणारी दिक् रेषा त्याच्या गुरुत्वमध्यांतून जाईल, तेव्हां तो पदार्थ स्थिर राहील.

अक हा एक पदार्थ आहे व तो स पासून टांगिला आहे. त्याचा ग हा गुरुत्वमध्य आहे. तर सर्व पदार्थाचें वजन ग तून जाणाऱ्या ग व दिक् रेषेंत कार्य करील म्हणजे पृथ्वीकडे ओढिलें जाईल.

स पासून ग व वर लंब काढ. तो ग व स ब स्थळीं मिळतो, असें समज. पदार्थाचें वजन ग व रेषेनें खालीं ओढिलें जात आहे; व त्यास स बिंदु उलट वर ओढीत आहे. आतां या दोन प्रेरणा समतोल होऊन पदार्थ स्थिर होण्यास त्यांचें कार्य परस्पर उलट दिशांनीं एका रेषेंत झालें पाहिजे. असें होण्यास ग व रेषा स बिंदूतून गेली पाहिजे. म्हणजे ग मधून जाणारी दिक् रेषा स मधून गेली पाहिजे. असें झालें म्हणजे पृथ्वीकडे पदार्थ ज्या दिशेनें ओढिला जात आहे त्याच्या उलट दिशेनें स बिंदु पदार्थास तोलून धरील. यास्तव स बिंदुपाशीं पदार्थ टांगिला तर तो वांकडा होऊन जेव्हांस मधून जाणारी दिक् रेषा ग मधून म्हणजे गुरुत्वमध्यांतून जाईल तेव्हां पदार्थ स्थिर राहील.

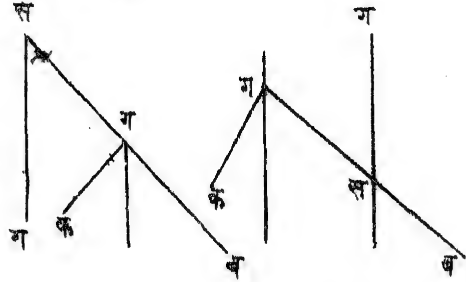


या सिद्धांतावरूनच कोणत्याही पदार्थाचा गुरुत्वमध्य काढण्याची रीति निघाली आहे ती अशी. पदार्थास दोन बिंदूपासून टांगावें. प्रत्येक वेळीं प्रत्येक बिंदूतून जाणारी दिक् रेषा पदार्थाच्या गुरुत्वमध्यांतून जाईल. यास्तव या दोन रेषा परस्पर ज्या बिंदूंत छेदितील तो बिंदु त्या पदार्थाचा गुरुत्वमध्य होईल.

(९६) जर एक पदार्थ एका बिंदूवर समतोल असला व त्या-

बिंदूवर फिरण्यास मोकळा असला आणि त्या पदार्थास हालविलें तर आधार बिंदूच्या खालीं किंवा वर जसा गुरुत्वमध्य असेल त्या प्रमाणें तो पदार्थ मूळ जाग्यावर येईल किंवा कलंडेल.

स हा आधार बिंदु आहे. ग हा गुरुत्वमध्य आहे. तो स च्या खालीं आहे. अशास्थितींत जर पदार्थास हालविलें तर ग बिंदूवर



चढेल. समजा कीं, तो ग्र ठिकाणी गेला. तेथेंही पदार्थाचे वजन गब, या दिक् रेषेंत कार्य करील. गब या प्रेरणेचें गअ आणि गक या प्रेरणांमध्यें पृथक्करण केलें, तें असें कीं, गअ प्रेरणा गस, रेषेंत कार्य करील. व दुसरी गक प्रेरणा गअशीं काटकोन करणाऱ्या दिशेंत कार्य करील. गअ प्रेरणेस गस तोलून धरील आणि पदार्थ गक रेषेंत मात्र चलन पावेल. चलन कोठपर्यंत मिळेल तर ग बिंदु सतून जाणाऱ्या दिक् रेषेंत येईपर्यंत सरेल. सारांश गुरुत्व आधार बिंदूच्या खालीं असला आणि पदार्थास हालविलें तर गुरुत्वमध्य वर चढतो. व तो पुनरपि आधार बिंदूच्या खालीं येण्यास म्हणजे मूळस्थितींत येण्यास यत्न करितो. आधार बिंदूच्या खालीं गुरुत्वमध्य असलेल्या पदार्थास स्थिरावस्थेंतून हालविलें कीं, तो पृथ्वीच्या आकर्षणानें मूळ अवस्थेंत येण्यास यत्न करितो या स्थितीस पदार्थाची स्थिरावस्था म्हणतात.

जर ग गुरुत्वमध्य आधारबिंदूच्या वर असला तर ज्यावेळीं थेट स वर म्हणजे स मधून जाणाऱ्या दिक् रेषेंत ग असेल तेव्हां पदार्थ समतोल राहील.

आतां पदार्थ हालविला तेव्हां गुरुत्वमध्य खालीं उतरला.

व ग स्थितींत गेला. गब या दिक् रेषेंत पदार्थाचें वजन कार्य करील. गब या मेरणेचें गअ आणि गस या दोन मेरणांत पृथक्करण केलें तर गस मेरणेच्या उलट स आधार बिंदूचें कार्य होईल. परंतु गअ या मेरणेनें पदार्थ कलंडेल. म्हणजे सन च्या थेट वर ग असतांना ज्या स्थितींत होता ती स्थिति पदार्थ सोडील या स्थितीस पदार्थाची अस्थिरावस्था म्हणतात.

(९७) सपाट पातळीवर पदार्थ ठेविला तर जेव्हां त्याच्या गुरुत्वमध्यांतून जाणारी दिक् रेषा पायांत पडेल तेव्हां पदार्थ उभा असेल. आणि ती रेषा बाहेर पडली तर पदार्थ कलंडेल.

कारण पदार्थाचें वजन गुरुत्वमध्यांतून जाणाऱ्या दिक् रेषेंत कार्य करितें, जेव्हां ही रेषा पायांतून जाते, तेव्हां त्यास पायाच्या उलट दिशेनें मतिबंध होतो. म्हणून पदार्थ उभा राहतो. जेव्हां ही रेषा पायाच्या बाहेर पडते तेव्हां पदार्थ ज्या दिशेनें खालीं पडणार त्याच्या उलट त्यास मतिबंध करण्यास कांहीं नसल्यामुळें पदार्थ कलंडतो किंवा पडतो.

उदाहरणें.

(१) एक काठी १ फूट लांब आहे. तिच्या एका टोंकास २ पौंडाचें व दुसऱ्या टोंकास ४ पौंडाचें आणि मध्यबिंदूवर ६ पौंडाचें अशीं तीन वजनें टांगिलीं आहेत, तर त्यांचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ. २ पौंडाच्या वजनापासून ७ इंचांवर.

(२) १, ३, ५, ७ पौंडांचीं वजनें अ फूट लांबीच्या काठीस एका टोंकापासून दुसऱ्या टोंकापर्यंत सारख्या अंतरावर टांगिलीं आहेत. तर काठी गुरुत्वशून्य आहे असें कल्पून त्यांच्या गुरुत्वमध्याचें मध्य बिंदुपासून अंतर काढ?

उ. $\frac{५ अ}{२४}$.

(३) एक कांब २ फूट लांबीची आणि ४ पौंड वजनाची आहे. तिच्या एका टोंकास २ पौंडाचें वजन टांगिलें आहे अशा स्थितींत तिचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ· टोंकापासून १ फुटावर.

(४) त्रिकोणाच्या एका बाजूस समांतर काढिलेल्या रेषेनें त्रिकोणाचा चौथा भाग कापून टाकिला आहे. तर बाकीच्या तुकड्याचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ· ७/९ अड.

(५) एक त्रिकोणाकार पत्रा तिन्ही कोंपऱ्यांखालीं राहून तीन मनुष्यांनीं उचलिला आहे. तिघांवर कसकसें वजन पडेल.

(६) त्रिकोणाच्या दोन कोनबिंदूपासून गुरुत्वमध्य सारख्या अंतरावर असेल, किंवा कोनबिंदु व गुरुत्वमध्य यांस सांधणारी रेषा त्या कोनबिंदूच्या समोरच्या बाजूवर लंब असेल, तर तो त्रिकोण समद्विभुज असेल.

(७) १४ फूट लांबीची कांब काटकोनाकार अशी वांकविली आहे कीं, तिचा १ भाग ८ फूट लांब आहे व दुसरा ६ फूट आहे तिचा गुरुत्वमध्य काढ? उ· सरळ कांबीच्या गु· पासून १√२/७ फूट अंतरावर.

(८) चौरसाच्या जवळजवळच्या दोन बाजूंचे मध्य सांधून जो एका कोंपऱ्यास त्रिकोण होतो तो काढून टाकिला तर बाकीच्या आकृतीचा गुरुत्वमध्य काढ? उ· चौरसाच्या मध्यापासून कर्णाच्या १/२१ अंतरावर.

(९) एका चौरसाच्या एका बाजूवर एक समभूज त्रिकोण काढिला आहे. व तो चौरसाच्या बाहेर आहे तर त्या आकृतीचा गुरुत्वमध्य काढ?

उ· त्रिकोणापासून पायाच्या ८+२√२ अंतरावर.

(

(१०) एक त्रिकोणाकार पत्रा क्षितिजपातळीशीं समांतर राहील अ-

सा त्याच्या बाजूंच्या मध्यबिंदूपासून तीन सांखळ्यांनीं टांगिला आहे. तर पत्र्याचें किती वजन असावें म्हणजे त्यावर कोठेंही ८४ शेर वजनाचा मनुष्य पत्रा न कलंडतां चालू शकेल?

उ. २५२ शेर.

(११) एक गोल टेबल तीन पायांवर उभें आहे. हे पाय टेबलाच्या परीघांत समभुज त्रिकोणाच्या कोनबिंदूंवर आहेत. टेबलाचें वजन १० शेर आहे. टेबल न कलंडतां त्यावर कोठेंही अत्यंत केवढें मोठें वजन ठेवितां येईल.

उ. १० शेर.

(१२) त्रिकोणाचा पाया आणि त्याची उंची दिली असतां त्यापासून असा त्रिकोण करकीं, तो पाया वर क्षितिजपातळीशीं लंब अशा दिशेंत स्थिर राहील.

(१३) एकाच कर्णावर जर अनेक काटकोन त्रिकोण असले तर त्यांचें गुरुत्वमध्य वर्तुळाच्या परिघांत असतील.

(१४) एक त्रिकोणाकार पत्रा त्याच्या एका बाजूंतील बिंदूपासून टांगिल्यास त्याची एक बाजू दिक्‌रेषेंत स्थिर रहावी. तर तो बिंदु कोठें असावा नें काय?

उ. त्या बिंदूचें स्थान बाजूच्या एका टोंकापासून जितकें लांब असेल त्याच्या दुप्पट अंतरावर दुसऱ्या टोंकापासून असतें.

(१५) त्रिकोणाच्या बाजू दुभागून ते बिंदु सांधिले आणि जो त्रिकोण होतो तो त्रिकोणांतून काढून टाकिला तर बाकी आकृतीचा गुरुत्वमध्य आणि सर्व त्रिकोणाचा गुरुत्वमध्य एकच असतात.

प्रकरण ८

साधीं यंत्रें.
किंवा
यांत्रिक शक्ति.

(१) यंत्र— ज्याच्या सहाय्यानें एका ठिकाणीं लाविलेल्या प्रेरणेच्या हातून दुसऱ्या ठिकाणीं काम करून घेतां येतें, त्यास यंत्र अशी संज्ञा देतात. यंत्राच्या योगानें नवी शक्ति उत्पन्न होत नाहीं; परंतु शक्तीस एकापदार्थांतून दुसऱ्या पदार्थांत नेतां येते, किंवा तिचा कांहीं रूपभेद करितां येतो. म्हणजे प्रेरणा एका ठिकाणीं कार्य करीत असल्यास यंत्राच्या योगानें तिचें कार्य दुसऱ्या ठिकाणीं घेतां येतें. तिची दिशा बदलतां येते. व तिच्या जोरांत ही फेरफार करितां येतो.

यंत्रांचा उपयोग मुख्यत्वेंकरून पदार्थास ढकलण्यास, ओढण्यास किंवा उचलण्यास करितात. या कामास ज्या साध्या यंत्रांचा उपयोग करितात. तीं दांडे व दोऱ्या होत. परंतु यंत्रशास्त्रांत अगदीं साधीं अशीं सहा यंत्रें कल्पितात. यांस मुख्य यांत्रिक शक्ति असेंही नांव देतात. तीं येणें प्रमाणें:—

१ उच्चालक.
२ आंसास खिळलेलें चाक.
३ कप्पी.
४ उतरण.
५ पाचर.
६ मळसूत्र किंवा स्क्रू.

(९८) यंत्रस्थितिशास्त्रांतया यंत्रां विषयीं विचार करितांना तीं स्थिर आहेत असें कल्पिलें पाहिजे; म्हणजे यंत्रास एका वि-

काणीं प्रेरणा लाविली असतां ती त्या यंत्रास दुसऱ्या ठिकाणीं लाविलेल्या प्रेरणेनें समतोल राहील. या ज्या दोन प्रेरणा त्यांमध्यें भेद राखण्याकरितां त्यांपैकीं एकीस **शक्ति** व दुसरीस **वजन** अशीं नांवें देऊं. तसेंच यंत्राच्या गणितरूप विचारांत त्याचे अवयव घर्षण व्यतिरिक्त आणि केवळ ताठ आहेत, त्यांच्या आंगीं वजन किंवा जडता नाहीं, त्यांस लाविलेल्या दोऱ्या अगदीं नरम आहेत आणि यंत्राच्या चलनास हवेचा प्रतिबंध होत नाहीं असें साधारणतः धरितात. आणि जेव्हां यांपैकीं कोणाचा मुद्दाम उल्लेख केलेला नसेल, तेव्हां असेंच समजावयाचें आहे.

(९९) जेव्हां यंत्रानें थोड्या शक्तीनें मोठें वजन उचललें जाईल, तेव्हां त्या यंत्रापासून फायदा होईल. त्यास **यांत्रिकस्वार्थ** अशी संज्ञा देऊं. तो स्वार्थ वजन आणि शक्ति यांमधील प्रमाण आहे, म्हणजे वजनास शक्तीनें भागून जो भागाकार येईल तो **यांत्रिक स्वार्थ** होईल. म्हणजे जर विवक्षित यंत्रानें १ शेराच्या शक्तीनें १५ शेरांचें वजन तोलून धरिलें असेल तर त्या यंत्राचा यांत्रिकस्वार्थ १५ होईल.

ज्यापेक्षां मागें प्रेरणांच्या कार्याविषयीं व अनेक प्रेरणांच्या कार्यापासून समतोलत्व राहण्यास कोणत्या गोष्टी अवश्य लागतात. याविषयीं आणि गुरुत्वमध्याविषयीं यथास्थित विवेचन केलें आहे, त्यापेक्षां आतां यंत्राच्या समतोलत्वाविषयीं नियम काढण्यास फारसें कठीण जाणार नाहीं.

उच्चालक.

(१००) सर्व यंत्रांत उच्चालक हें फार साधें यंत्र आहे.

एका स्थिर बिंदूवर फिरता असा दांडा किंवा गज असला म्हणजे त्यास **उच्चालक** म्हणतात. ज्या स्थिर बिंदूवर किंवा आधारावर दांडा फिरतो त्यास त्या उच्चालकाचा **टेंकू** असें म्हणतात आणि

या टेंकूनें उच्चालकाचे जे दोन भाग झालेले असतात त्यांस उच्चालकाच्या **भुजा** असें नांव देतात. जेव्हां या दोन्ही भुजा एका सरळ रेषेंत असतात तेव्हां त्यास **सरळउच्चालक** म्हणतात आणि जेव्हां दोन्ही भुजा एका सरळ रेषेंत नसतात तेव्हां त्या उच्चालकास **वांकडा उच्चालक** असें म्हणतात. ज्या पातळींत टेंकूभोंवती उच्चालक फिरूं शकतो त्या पातळीस उच्चालकाची पातळी असें म्हणतात आणि ज्या प्रेरणांचें उच्चालकावर कार्य होतें त्या प्रेरणा या पातळींत कार्य करितात असें समजावयाचें आहे.

(१०१) उच्चालकांत उच्चालक शक्ति, उच्चाल्यपदार्थ आणि टेंकू या तिहींचा विचार कर्तव्य असतो. जी शक्ति उच्चाल्यपदार्थास उचलिते किंवा आधार देते ती **उच्चालकशक्ति** होय. जें वजन किंवा जो पदार्थ या शक्तीनें उचलिला जातो तो **उच्चाल्य पदार्थ** होय. या दोन्ही प्रेरणाच आहेत, परंतु त्यांत कांहीं भेद दाखविण्याकरितां उच्चालक प्रेरणेस **उच्चालकशक्ति** किंवा **शक्ति** आणि उच्चाल्य पदार्थास **वजन** अशीं नांवें देऊं.

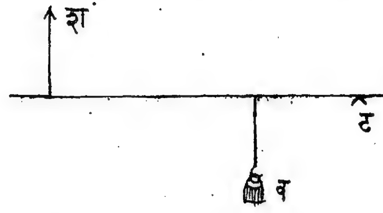
(१०२) **अब** या उच्चालकाच्या **अक, बक** भुजा **क** टेंकू भोंवतीं फिरतात. **अक** भुजेच्या लांबीच्या तिप्पट **बक** भुजेची लांबी आहे, तर **क** भोंवती **अ** टोंकाच्या फिरण्यानें जेवढें वर्तुळ किंवा जेवढा वर्तुळ कोंस होईल, त्याच्या तिप्पट परिघाचें वर्तुळ किंवा तिप्पट लांबीचा वर्तुळ कोंस **क** भोंवती **ब**च्या फिरण्यानें होईल. म्हणजे **अ** टोंक जेवढ्या अवकाशांतून **क** टेंकू भोंवती फिरेल त्याच्या तिप्पट अवकाशांतून **ब** टोंक **क** भोंवती फिरेल. **अ** टोंकाच्या तिप्पट **ब** टोंकाचा **क** भोंवती फिरण्याचा वेग असेल. कारण **क** पासून **ब** चें अंतर जास्त असल्यानें त्या-



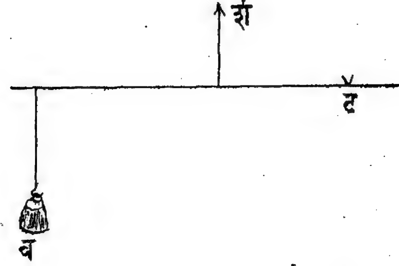
क टेंकूपासून अंतरें कअ, कब होतील व कअ, कब हेच क भों-वतीं फिरण्याचे त्यांचे आंस होतील. यास्तव प्रेरणा यांच्या प्रमाणांत अ-सतील. जर उच्चालक सरळ नसेल आणि प्रेरणा हव्या त्या दिशांनीं कार्य करीत असतील तर प्रेरणांच्या कार्यदर्शक रेषांवर टेंकूपासून जे लंब त्यां-च्या प्रमाणांत प्रेरणा असतील. परंतु हीं प्रमाणें उलट असतील. म्हणजे जी प्रेरणा टेंकूजवळ असेल ती मोठी व लांब असेल ती लहान अशा अ-सतील. म्हणून उच्चालकानें यांत्रिक स्वार्थ मिळविण्याकरितां टेंकूपासून जास्त अंतरावर शक्ति लावून थोड्या अंतरावर मोठें वजन उचलितात. वास्तविक दोहों प्रेरणांचें चालकत्व किंवा काम साररवेंच होतें. कमीजो-राची शक्ति जास्त अवकाशांतून चलून पावते आणि मोठें वजन थो-ड्या अवकाशांतून चढतें. उच्चालकापासून यांत्रिकस्वार्थ प्राप्त होण्या-स जें वजन उचलावयाचें तें टेंकूपासून जितक्या अंतरावर असेल त्याहून जास्त अंतरावर शक्ति लाविली पाहिजे. जितक्या पटीनें हें अंतर असेल तितक्यापटीचें वजन उचललें जाईल; आणि जर वज-न टेंकूपासून जास्त अंतरावर असून शक्ति टेंकूजवळ लाविली अ-सेल, तर नसल्या उच्चालकापासून यांत्रिक स्वार्थ कांहीं होणार ना-हीं.

(१०२) उच्चालकशक्ति, उच्चाल्यवजन आणि टेंकू यांच्या स्थान-भेदेंकरून उच्चालकाचे तीन वर्ग कल्पितात.

उच्चालक्य वजन टेंकूजवळ म्ह-
णजे टेंकू आणि शक्ति यांच्या मध्यें असतें म्हणून यांत टेंकूपासून शक्ति सर्वदां जास्त अंतरावर असते व या पासून सर्वदां यांत्रिक स्वार्थ प्राप्त होतो.



तिसऱ्या प्रकारच्या उच्चालकांतही उच्चालकशक्ति आणि वजन टेंकूच्या एकाच अंगास कार्य करितात. पण शक्ति टेंकूच्या जवळ म्हणजे टेंकू आणि वजन यांच्यामध्यें असते. यांत शक्ति सर्वदां वजनापेक्षां टेंकूपासून कमी अंतरावर असते म्हणून या प्रकारच्या उच्चालकापासून यांत्रिकस्वार्थ कधींच होत नाहीं.



(१०४) मोठें वजन किंवा दगड उचलण्यास किंवा सोडविण्यास पहारेचा किंवा मोठ्या दांड्याचा उपयोग आपण करितों त्यास तरफ म्हणतात. हें पहिल्या वर्गाच्या उच्चालकाचें उदाहरण होय. जें वजन उचलावयाचें तें एका टोंकास असतें, व दुसऱ्या टोंकावर हाता-

नें दाबितों ती उच्चालक शक्ति असते. आणि पहारीरखालीं या दोहोंच्या मध्यें जो दगडाचा किंवा लांकडी तुकड्याचा आधार देतों तो टेंकू हो-



य. तसेंच शेगडीच्या कांठावर टेंकून उलथन्यानें निखारे सारितों तें-ही याच वर्गाच्या उच्चालकाचें उदाहरण होय. तसेंच भट्टींतील कोळसे सारण्याकरितां जी लोखंडाची शीग घेतात ती याचेंच उदाहरण होय. यांत जितकी शक्ति टेंकूपासून लांब असते तितकें मोठें वजन उचलितां येतें. तसेंच पाण्याचा बंब चालविण्यास जी दांडी असते, तीही पहिल्या वर्गाचा उच्चालक होय. तसेंच कात्र्या, गात्र्या, सांडशी, चिमटे इत्यादि हत्यारें या वर्गांतील जोड किंवा दुहेरी उच्चालकांचीं उदाहरणें होत.

दुसऱ्या वर्गांतल्या उच्चालकांची उदाहरणें व्यवहारांत फार आढळत नाहींत. होडीचें आवलें हें दुसऱ्या प्रकारच्या उच्चालकाचें उदाहरण होय. होडी हें वजन, हातानें आवलें मारतों ती शक्ति, आणि त्याचें चपटें पातें पाण्यावर टेंकलेलें असतें तो टेंकू होय. बिजागराचें दार लावणें उघडणें, आडकित्ता व त्या प्रकारचीं दुसरीं कापण्याचीं यंत्रें

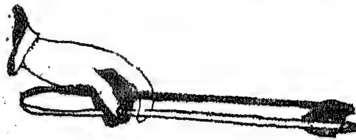


व आगगाडीवरील गठ्ठे गाडींत नेण्याच्या एकचाकी गाड्या इत्यादि दुसऱ्या वर्गाच्या उच्चालकांचीं उदाहरणें होत.

(१०५) तिसऱ्या वर्गाच्या उच्चालकांत कांहींच यांत्रिक स्वार्थ नस-

त्यामुळें त्याचीं उदाहरणें प्रचारांत याहूनही कमी आढळतात. शक्तीपेक्षां केवळ जलदी काम करण्याची अपेक्षा असते तेथें मात्र या प्रकारच्या उच्चालकाचा उपयोग करितात. याचें सर्व साधारण उदाहरण म्हणजे मनुष्याचा बाहु होय. दुसरे अवयव मांड्या बोटें वगैरे हीं याचींच उदाहरणें होत. बाहूमध्यें खांद्यांत किंवा कोपरांत ज्या सांध्यांत हाड खिळलेलें आहे तो टेंकु, या टेंकूच्या हाडांस खिळलेले जे स्नायु व ज्यांच्या योगानें आपण हात हालवितों व वजन उचलितों ती शक्ति, आणि सर्व बाहु व हातांत जें वजन असेल तें वजन होय. कातण्याचा चरक किंवा भाता पायानें फिरविण्यास जी योजना असते ती याच वर्गांतील उच्चालकाचें उदाहरण होय. ज्या बिजागरीनें जमिनीस किंवा चौकटीस अडकविलेला असतो तो टेंकु, वर खालीं करण्याकरितां पायानें दाबतों ती शक्ति, जो चरक फिरतो किंवा जी हवा सोडतो तें वजन होय. सोनाराचा चिमटा हें याचेंच उदाहरण होय.

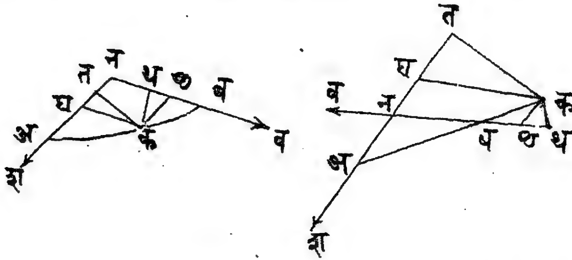




(   ) उच्चालकावर मुख्यत्वें दोन प्रेरणा कार्य करितात. या दोन प्रेरणांच्या कार्यानें उच्चालक टेंकूवर समतोल राहिला पाहिजे; या दोन प्रेरणांनीं उच्चालक टेंकूवर समतोल राहण्यास प्रेरणांची परिणामी प्रेरणा टेंकूतून गेली पाहिजे; आणि दोहों प्रेरणांच्या कार्यांच्या किंवा यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या कार्यांच्या बरोबरीचें कार्य उलट दिशेनें करण्याजोगी प्रेरणा टेंकूनें लाविली पाहिजे. टेंकू हा दोहों प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेंतील बिंदु आहे म्हणून या बिंदु सभोंवतालचीं दोहों प्रे-

रणांचीं भ्रामकत्वें समान असलीं पाहिजेत. उच्चालकावर कार्य करणाऱ्या प्रेरणा परस्पर समांतर दिशेंत कार्य करीत किंवा हव्या त्या दिशांनीं कार्य करीत. या प्रेरणा दोनच असोत किंवा अनेक असोत. टेंकूच्या बिंदूच्या दोहोंकडील प्रेरणांचीं भ्रामकत्वें समान असतील, तर उच्चालक टेंकूवर समतोल राहील. टेंकू भोंवतालचीं त्याच्या दोहोंकडील प्रेरणांचीं भ्रामकत्वें समान असण्यास काय गोष्टी अवश्य असाव्या लागतात हें काढिलें म्हणजे उच्चालकाच्या समतोलत्वाविषयींचा नियम निघाला.

(   ) जेव्हां उच्चालक समतोल असतो तेव्हां शक्ति आणि उच्चाल्यवजन त्यांच्या कार्य करण्याच्या दिशांवर टेंकूपासून काढलेल्या लंबांच्या व्युत्क्रम प्रमाणांत असतात तेव्हां उच्चालक समतोल असतो.



अकब किंवा अबक हा एक उच्चालक आहे क हा टेंकू आहे, श आणि व या दोन प्रेरणा अ आणि ब ठिकाणीं कार्य करितात. आणि त्यांनीं उच्चालक समतोल आहे. श आणि व यांची परिणामी प्रेरणा न स्थळीं कार्य करिते असें कल्पू. ज्यापेक्षां उच्चालक या प्रेरणांनीं क टेंकूवर समतोल आहे. त्यापेक्षां यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा क मधून गेली पाहिजे. म्हणून नक ही रेषा श आणि व यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा असली पाहिजे.

कपासून कठ आणि कघ, नअ आणि नब यांशीं समांतर काढ १ कत आणि कथ हे अ आणि नब यांवर लंब काढ. प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाच्या सिद्धांता प्रमाणें:—

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{कथ}{कघ}$$

कथथ आणि कतघ हे त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{कथ}{कघ} = \frac{कथ}{कत}$$

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत} = \frac{बक \cdot भु \cdot (कबथ)}{अक \cdot भु \cdot (कअत)}.$$

म्हणजे शक्ति व वजन त्यांच्या कार्य करण्याच्या दिशांवर टेंकूपासून काढलेल्या लंबांच्या व्युत्क्रम प्रमाणांत आहेत.

जर $\frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत}$ असेल आणि श आणि व प्रेरणा उच्चालकास परस्पर उलट दिशांनीं फिरवितील, तर श आणि व या प्रेरणा उच्चालकास समतोल ठेवितील.

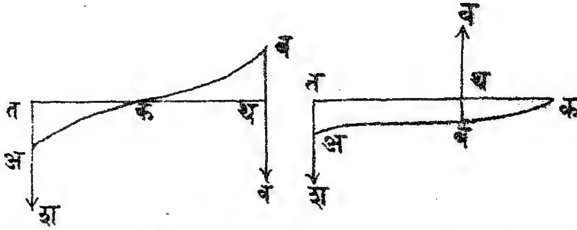
कारण $\frac{श}{व} = \frac{कथ}{कत} = \frac{कथ}{कघ}$.

या करितां नक रेषा श आणि व या प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेची कार्य करण्याची दिशा आहे, आणि ज्यापेक्षां परिणामी प्रेरणा क मधून जाते त्यापेक्षां त्यांनीं क वर उच्चालक समतोल राहील.

(   ) वरील कलमांत शक्ति व वजन यांच्या कार्य करण्याच्या दिशा परस्पर मिळतात असें कल्पिलें. त्या परस्पर मिळत नसून समांतर असतील, आणि त्यांनीं उच्चालक समतोल असेल तरी वरील सिद्धांत खरा असतो.

अकब किंवा अबक उच्चालक असून त्याचा क हा टेंकू आहे. श आणि व, अ आणि ब बिंदुस्थलीं समांतर दिशांनीं कार्य करितात, व उच्चालकास समतोल ठेवितात.

क मधून प्रेरणांच्या दिशांशीं लब अशी रेषा काढ. ती त्यांस



त आणि थ ठिकाणीं मिळते. श आणि ब या समांतर मेरणांची परिणामी मेरणा यांशीं समांतर असेल आणि तिच्या कार्य करण्याच्या बिंदूचीं यांपासून अंतरें यांच्या व्युत्क्रमणांत असतील. क टेंकूवर ज्यापेक्षां उच्चालक समतोल आहे त्यापेक्षां क तून परिणामी मेरणेची दिशा जाते.

$$\therefore \frac{श}{ब} = \frac{कथ}{कत}.$$

जर $\frac{श}{ब} = \frac{कथ}{कत}$ असेल आणि श आणि ब मेरणा उच्चालकास परस्पर उलट दिशांनीं फिरविनील तर, त्या उच्चालकास समतोल ठेवितील. कारण- $\frac{श}{ब} = \frac{कथ}{कत}$ आहे, म्हणून श आणि ब मेरणांची परिणामी मेरणा क मधून जाते. यास्तव उच्चालक यांनीं समतोल राहील.

यावरून हें उघड आहे कीं, उच्चालकाच्या समतोलत्वाची साधारण सारणी अशी आहे.

$$\frac{श}{ब} = \frac{कथ}{कत}; \text{ किंवा } श \times कत = श \times कथ.$$

यांत क त हा शक्तीच्या कार्यमार्गावरील टेंकूपासून काढलेला लंब आहे आणि क थ हा वजनाच्या कार्यमार्गावर काढलेला लंब आहे. म्हणून शक्ति व तिच्या कार्यमार्गावर टेंकूपासून काढलेला लंब यांच्या गुणाकाराबरोबर वजन आणि त्याच्या कार्यमार्गावरील टेंकूपासून काढलेला लंब यांचा गुणाकार असला पाहिजे. टेंकूपासून

शक्ति आणि वजन यांच्या कार्यमार्गावर काढलेल्या लंबांस शं आणि वं नांवें देऊं म्हणजे सारणी अशी होईल.

$$श \times शं = व \times वं$$

उच्चालकाचें वजन न कल्पिलें आणि त्याच्या कार्य करण्याच्या दिशेवरील टेंकूपासून लंब नं कल्पिला तर तें श बरोबर किंवा व बरोबर कार्य करील, त्या प्रमाणें त्याचें भ्रामकत्व मिळवावें लागेल म्हणजे-

$$श \times शं + न \times नं = व \times वं; \text{ किंवा } श \times शं = व \times वं + न \times नं$$

(   ) उच्चालकाच्या टेंकूवरील एकंदर दाब काढणें.

उच्चालकावर कार्य करणाऱ्या प्रेरणाच्या परिणामी प्रेरणेबरोबर टेंकूवर एकंदर दाब असेल हें उघड आहे. कारण टेंकू सर्व उच्चालकास तोलून धरितो, म्हणून शक्ति आणि वजन यांच्या परिणामी प्रेरणेच्या बरोबरीची व उलट दिशेनें कार्य करणारी प्रेरणा टेंकूच्या सहाय्यानें प्राप्त होते. शक्ति आणि वजन परस्पर समांतर आणि सरूप प्रेरणा असल्या तर टेंकूवरील दाब त्यांच्या बेरजेबरोबर असेल. विरूप म्हणजे विरुद्ध दिशांनीं कार्य करणाऱ्या असल्या तर त्यांची परिणामी प्रेरणा समांतरभुज चौकोनाच्या रीतीनें काढितां येईल.

प्रेरणा समांतर असल्या तर टेंकूवरील दाब.

पहिल्या वर्गाच्या उच्चालकांत .... श + व.
दुसऱ्या ,, ,, ... व − श.
तिसऱ्या ,, ,, ... प − व

उच्चालकाचें वजन हिशेबांत धरिल्यास तें शक्तीच्या दिशेनें किंवा विरुद्ध दिशेनें कार्य करीत असेल त्या प्रमाणें शक्तींत मिळवावें, किंवा वजा करावें. जर उच्चालकाचें वजन वं कल्पिलें तर टेंकूवरील दाबः—

पहिल्या वर्गाच्या उच्चालकांत ... प + व ± वं
दुसऱ्या ,, ,, ... व − (प ± वं)

तिसऱ्या ,, ,, ...(प± व)−व.

(   ) तराजू— उच्चालकाचा पदार्थांचीं वजनें करण्यास उपयोग करितात व या स्थितींत त्यास तराजू असें म्हणतात. याच्या उपयोगाप्रमाणें यास ताजवा, तागडी, धट अशीं हीं नांवें देतात. याचा टेंकू शक्ति आणि वजन यांच्या मध्यें असतो. म्हणून हा पहिल्या प्रकारचा उच्चालक होय. याच्या दोनही भुजा समान असतात व दांडीच्या दोहों टोंकास, दोन पारडीं टांगिलेलीं असतात. याचा टेंकू दांडीच्या थेट गुरुत्वमध्यावर नसून त्याच्यावर असतो. तागडीची दांडी उचलण्यास लाविलेल्या दोरीचा शेवट किंवा ताजव्याच्या मधल्या कांट्याचें टोंक हीं नेहमी दांडीच्यावर म्हणून दांडीच्या गुरुत्वमध्याच्या वर असतात. यास्तव दांडी, पारडीं आणि त्यांतील वजनें या सर्व समूहाच्या गुरुत्वमध्यापासून बराच वर टेंकू असेल. कारण या सर्व समूहाचा गुरुत्वमध्य दांडीच्या गुरुत्वमध्याहूनही खालीं असेल. ज्या पदार्थाचें वजन काढावयाचें असेल. त्यास एका पारड्यांत घालतात, आणि दुसऱ्या पारड्यांत वजनें घालतात. ज्या वजनानें तराजूची दांडी अगदीं समतोल म्हणजे क्षितिज पातळीशीं समांतर अशी राहते, तें त्या पदार्थाचें वजन असतें. कारण भुजा समान व दांडी क्षितिजपातळीशीं समांतर म्हणजे पदार्थ व वजनें ज्या दिशेनें कार्य करितात, त्या दिशांशीं लंब असतात म्हणून दोनही प्रेरणा समान असल्या शिवाय समतोलत्वच राहणार नाहीं. आणि दांडी हालली तरी कांहीं हेलकावे खाऊन (गुरुत्वमध्यावर टांगण्याचा बिंदु असल्यामुळें, स्थिर होईल, आणि त्यावेळीं दांडीतून जाणाऱ्या क्षितिजाशीं समांतर अशा पातळीशीं कांहीं अंशांचा कोन करील. हा कोन ज्या प्रमाणें लहान मोठा होईल. त्यावरून तराजूची सूक्ष्मता मापितां येईल.

जेव्हां दुसऱ्या पारड्यांतील वजनावरून पदार्थाचें तितकें वजन आहे हें सांगतों, तेव्हां उच्चालकाच्या म्हणजे येथें तराजूच्या भुजा सार-

रख्या लांबीच्या असून पारडीं रिकामी असतांनाही दांडी समतोल असते असें समजतों. या प्रमाणें तराजू आहे किंवा नाहीं हें, वजनें पहिल्या पारड्यांत आणि पदार्थ दुसऱ्या पारड्यांत घालून समतोलत्व राहतें किंवा नाहीं हें पाहिल्यानें समजतें. यास्तव भुजा सारख्या लांबीच्या असल्या आणि पारडीं रिकामीं असतां दांडी समतोल राहिली म्हणजे तो तराजू खरा आहे असें समजावें. आणि अशी दांडी समतोल न राहिली तर तो तराजु खोटा असें समजावें

(   ) चांगला तराजू करितांना मुख्यत्वें तीन गोष्टींकडे लक्ष दिलें पाहिजे.

(१) पारडीं रिकामीं असतां किंवा त्यांत सारखीं वजनें असतांना तराजूची दांडी क्षितिज पातळीशीं अगदीं समांतर रहावी, म्हणजे तराजू खरा असावा.

(२) तराजूच्या पारड्यांतील वजनांत यत्किंचित फरक असला तरी तराजूवरून तत्काळ समजावा, म्हणजे तराजू सूक्ष्म असावा.

(३) तराजूची दांडी समतोल असतां हालविली तर तत्काळ पुनः समतोल स्थितींत स्थिर व्हावी. म्हणजे तराजू स्थायी व्हावा.

(   ) तराजू चांगला होण्यास ज्या अवश्य गोष्टी त्या कशा परिपूर्ण होतात तें काढणें.

मागील विवेचनांत तराजूच्या दांडीचें वजन हिशेबांत धरिलें नव्हतें. तर तें आतां हिशेबांत धरून व पारडीं व ती दांडीस टांगण्यास लाविलेल्या दोऱ्या किंवा सांखळ्या यांचीं वजनें हीं हिशेबांत धरून हा सिद्धांत सिद्ध करूं.

अब ही तराजूची दांडी आहे ट हा तिचा टेंकू किंवा आधारबिंदु आहे*.

* दांडी एका दोरीनें टांगिली असेल तर दोरीचा शेवट टेंकू किंवा आधारबिंदु होईल. आणि मध्यें फिरता कांटा असून त्यासभोंवती चौकट असून तिनें दांडी टांगिली असली तर कांट्याचें टोंक

अब = २ ल. आणि तराजूची प्रत्येक भुजा ल लांबीची आहे. अ आणि ब या बिंदुस्थळीं दांडीस पारडीं टांगिलीं आहेत. या दोन बिंदुस साधणाऱ्या रेषेपासून ट टेंकूचें अंतर ह आहे. दांडीचें वजन व आहे; दांडीच्या ग गुरुत्वमध्याचें ट पासून अंतर ड आहे. ट पासून अब वर जो लंब असेल त्या लंबांत ग गुरुत्वमध्य असतो व तो तसा आहे असें कल्पूं. प्रत्येक पारडें व त्यास लाविलेल्या दोऱ्या वगैरे यांचें वजन प आहे आणि क, ख, वजनें अ आणि ब टोंकास लाविलेल्या पारड्यांत आहेत. दांडीचें वजन, अ व ब बिंदूस टांगिलेलीं क + प आणि ख + प वजनें ग, अ, ब बिंदुपासून ढिक् रेषेंत कार्य करितील. क, ख वजनें समान नसतांना तराजू समतोल स्थितींत येतो तेव्हां त्याची दांडी क्षितिजपातळीशीं कोन करिते. ज्यापेक्षां ट टेंकूनें तराजू समतोल आहे, त्यापेक्षां ट सभोंवतालच्या वजनाच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. खचें भ्रामकत्व धन धरिलें तर क आणि व यांचीं भ्रामकत्वें ऋण व धन होतील. क + पच्या कार्य करण्याच्या दिशेवरील ट पासून काढलेला लंब टत आणि व आणि ख + प यांच्या दिशांवरील लंब टद आणि टथ आहेत म्हणून.

(ख + प) टथ − (क + प) टत + व × टद = ०

अब बिंदूस साधणाऱ्या रेषेस तिजवरील ट पासून का-

टेंकू किंवा आधारबिंदु दर्शवील.

ढलेला लंब इ ठिकाणीं मिळतो. इ तून क्षितिजाच्या पातळीशीं समांतर रेषा काढ. ती क आणि ख यांच्या दिशांस न आणि म ठिकाणीं मिळते. ट पासून नइमवर टफ लंबकाढ.

तर अइ = इब = ल; टइ = ह; टग = ड. आणि ∠नइअ = ϑ.

टत = नफ = नइ − फइ = ल. कोभु(ϑ) − ह कोभु(टइफ) =

= ल कोभु(ϑ) − ह भु(ϑ).

टथ = मफ = मइ + इफ = ल कोभु(ϑ) + ह भु(ϑ).

टद = ड भु(टगद) = ड भु(ϑ)

टत, टथ आणि टद यांच्या या किमतीवरील सारणींत लिहून.

(ख+प) (ल कोभु ϑ + ह भु ϑ) − (क+प)(ल कोभु ϑ − ह भु ϑ)

+ वड भु ϑ = ०

भु ϑ ((क+ख+२प) ह + वड) = कोभु ϑ (क−ख) ल.

$$\frac{\text{भु } \vartheta}{\text{कोभु } \vartheta} = \text{स्प. } \vartheta = \frac{(\text{क}-\text{ख})\ \text{ल}}{(\text{क}+\text{ख}+२\text{प})\ \text{ह}+\text{वड}}$$

ही समतोलत्वाची साधारण सारणी झाली.

(१) जेव्हां क = ख असेल तेव्हां स्प. ϑ = ० होईल म्हणजे दांडी क्षितिजपातळीशीं समांतर स्थिर राहील. याचा अर्थ तराजू खरा असेल. यास्तव पहिली अवश्यक गोष्ट परिपूर्ण होण्यास तराजूच्या भुजा सारख्या असाव्या आणि दांडीचा गुरुत्वमध्य टेंकूपासून दांडीवरच्या लंबांत असावा.

(२) जेव्हां क आणि ख यांमधील अंतर नियमित असेल, तेव्हां स्प ϑ याची किंमत जशी मोठी होईल. त्याप्रमाणें तराजूची सूक्ष्मता वाढेल. क−ख याची नियमित किंमत असतां स्प ϑ याची किंमत वाढण्यास (क−ख) चा छेद म्हणजे (क+ख+२प) × $\frac{\text{ह}}{\text{ल}}$ + व $\frac{\text{ड}}{\text{ल}}$ याची किंमत होईल तितकी कमी झाली पाहिजे. तसेंच जर स्प ϑ याची किंमत नियमित असली म्हणजे दांडी नि-

यमिन कोनांतून झुलत असली तर क–ख याची किंमत जितकी लहान असेल त्या प्रमाणें त्या थोड्या अंतरास, नियमित कोन मोग होईल. म्हणजे तराजूची सूक्ष्मता जास्त होईल. या करितां क–ख यांची किंमत कमी होऊन स्प. θ याची किंमत नियमित राहण्यास क–ख याच्या छेदाची म्हणजे (क+ख+२प)×$\frac{ह}{ल}$ + ब$\frac{ड}{ल}$ याची किंमत कमी झाली पाहिजे. यास्तव तराजूस सूक्ष्मता येण्यास (क+ख+२प)$\frac{ह}{ल}$ + व×$\frac{ड}{ल}$ याची किंमत होईल तितकी कमी असली पाहिजे.

(२) समतोलत्वापासून तराजू हालविला असतां पुनः समतोल स्थितींत आणणाऱ्या ज्या प्रेरणा त्यांचें भ्रामकत्व ज्या प्रमाणें जास्त असेल त्या प्रमाणें तराजूचें स्थायित्वही जास्त असेल.

प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीजः–

((क+ख+२प) ह+वड) भु· θ – (क–ख) ल कों· भु· θ.

जर क = ख असेल तर भ्रामकत्वांची बेरीजः–

((क+ख+२प) ह+वड) भु· θ.

या करितां तराजूस स्थायित्व येण्यास याची किंमत होईल तितकी जास्त असली पाहिजे. परंतु वर सांगितलें कीं, तराजूच्या चांगलेपणाची दुसरी आवश्यकता परिपूर्ण होण्यास याची किंमत होईल तितकी कमी असली पाहिजे. या दोहोंचा विरोध येतो. परंतु (क+ख+२प) ह+वड याची आणि ल याची अशा दोहोंच्या किमती वाढविल्यानें दोनही गोष्टी परिपूर्ण होतात. म्हणजे भुजांची लांबी ल वाढवून आणि टेंकूचें दांडीपासून आणि तिच्या गुरुत्वमध्यापासून अंतर वाढवून तराजूची सूक्ष्मता आणि स्थायित्व दोन्ही वाढवितां येतात.

(११३) तराजूच्या स्थायित्वापेक्षां साधारण त्याची सूक्ष्मता जास्त महत्वाची असते. कारण तराजूस समतोल स्थितींतून हालविलें अ-

सतां त्याचे दोहोंबाजूंस वर खालीं सारखेच हेलकावे होतात किंवा नाहीं, म्हणजे तराजूची दांडी क्षितिजपातळीशीं समांतर स्थितींत स्थिर होते किंवा नाहीं हें डोळ्यांनीं चांगलें समजतें व त्याप्रमाणें वजनांत फेरफार करितां येतो. यास्तव व्यवहारांत स्थायित्वाचा विशेष विचार न करितां तराजूस सूक्ष्मता आणण्याचीच योजना करितात. ड अंतर लहान ठेवितात. आणि क्ष तर फारच लहान ठेवितात. वस्तुतः ह अंतर शून्य असतें किंवा अत्यंत लहान असतें.

(११४) खोट्या तराजूनें पदार्थाचें खरें वजन काढणें.

समजा कीं, पदार्थाचें खरें वजन क्ष आहे. खोट्या तराजूच्या भुजा अ आणि ब आहेत. जेव्हां पदार्थ अ भुजेच्या पारड्यांत घातला तेव्हां त्याचें वजन व भरलें तर—

$$\therefore क्ष अ = व ब.$$

ब भुजेच्या पारड्यांत घातला तेव्हां त्याचें वे वजन भरलें तर—

$$क्ष ब = वे अ$$

या दोहों समीकरणांचा गुणाकार करून.

$$क्ष^2 . अ ब = अ ब . व वे$$

$$\therefore क्ष^2 = व वे$$

$$\therefore क्ष = \sqrt{व वे}$$

म्हणून खरें वजन दोहों खोट्या वजनांचे भूमिति मध्य प्रमाण असतें.

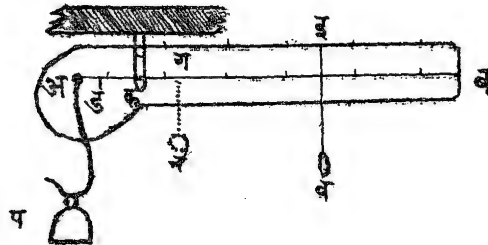
(११५) **वजन करण्याच्या दांड्या**— दुसऱ्या प्रकारचे तराजू असतात त्यांत त्यांच्या भुजा समान नसतात, आणि एकाच वजनानें निरनिराळ्या वजनांच्या पदार्थांची वजनें काढितां येतात. यांस **दांड्या** म्हणतात. दांडीचे भाग पाडून त्यांवर कित्येकांत वजन सारतात आणि कित्येकांत टेंकू सारतात. असल्या दोन प्रकार-

ऱ्या दांड्यांविषयीं सांगतों

(११६) वजन करण्याच्या साध्या दांडीचें वजन सारण्याचें भागपाडणें

साधी दांडी टेंकूच्या एका बाजूस बारीक व लांब आणि दुसऱ्या बाजूस जाड व आंखूड असते. आंखूड भुजेस वजनें टांगण्याचा आंकडा असतो किंवा पारडें असतें. बारीक व लांब भुजेवर छेद पाडलेले असतात. त्यावरून एक नियमित वजन अडकविलेलें कंकण पुढें मागें सारतां येतें व कोणत्या छेदावर तें वजन सारलें असेल त्यावरून वजन समजतें.

अब एक दांडी आहे, तिचा क हा टेंकू आहे. अ ठिकाणीं ज्याचें वजन करणें तो पदार्थ घालण्याचें पारडें आहे. दांडीचा गुरुत्वमध्य ग आहे व तिचें वजन न आहे तें गुरुत्वमध्यापासून कार्य करील. व वजन क टेंकूपासून हव्या तितक्या अंतरावर ठेवितां येतें. समजा कीं व वजन इ पाशीं असतां व प पदार्थ पारड्यांत असतां दांडी समतोल आहे. क टेंकूच्या एका बाजूस प पदार्थाचें वजन अ ठिकाणीं दिक् रेषेंत कार्य करीत आहे, आणि टेंकूच्या दुसऱ्या बाजूस दांडीचें वजन न आणि लाविलेलें वजन व अशीं दिक् रेषांत कार्य करीत आहेत. त्यांच्या क भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे.



∴ प. अक − न. कग − व. कइ = ०

कगच्या दुसऱ्या बाजूस अक मध्ये ड हा असा बिंदु घे कीं,

त्या ठिकाणीं व वजन टांगिलें असतां पदार्थाशिवाय नुसती दांडी समतोल राहील म्हणजे,

व. कड = न. कग.

ही किंमत वरील समीकरणांत लिहून.

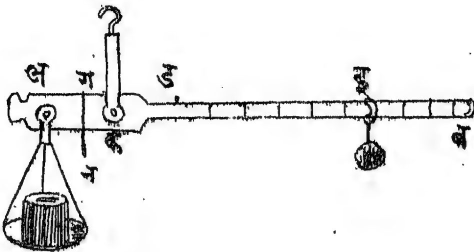
∴ प. अक − व. कड − व. कइ = ०

∴ प. अक = व (कड + कइ) = व. डइ.

$$\therefore \text{प} = \text{व}. \frac{\text{डइ}}{\text{अक}}.$$

आतां डइ = अक, २अक, ३अक, ४अक याप्रमाणें घेतल्यास प = व २व ३व ४व या प्रमाणें होतील म्हणून ड पासून अक एवढे दांडीस छेद पाडून त्यांवर १, २, ३, ४ इत्यादि आंकडे मांडिले म्हणजे ज्या आंकड्यावर व वजन असेल तितके व त्या पदार्थाचें वजन होईल. याही भागांचें पोटभाग हवेतर करावे. या तराजूस रोमन तराजू म्हणतात.

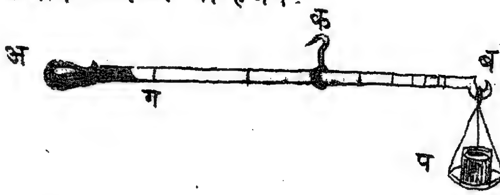
वरील दांडींत गुरुत्वमध्य बारीक व लांब भागांत होता तो जाड व आखूड भागांत असला तर ड बिंदु बारीक भागांत येईल. आणि छेदांस तेथपासून आरंभ होईल.



(११७) डेनिश तराजू.— दुसऱ्या एका प्रकारची दांडी असते तिला डेनिश तराजू म्हणतात. या दांडीस एके टोंकास जाड बोंड असतें व दुसऱ्या टोंकास वजन करण्याचा पदार्थ घालण्याचें पारडें

किंवा आंकडा असतो. याचा टेंकू फिरता असतो. व तो पुढें मागेंसारून पदार्थाचें वजन काढितां येतें.

अब ही दांडी आहे, तिचा ग गुरुत्वमध्य आहे, आणि न वजन आहे. ब टोंकाच्या पारड्यांत प पदार्थ आहे. समजा कीं, टेंकू क ठिकाणीं असतां दांडी समतोल आहे. दुसरें वजनच नाहीं तेव्हां पदार्थास दांडीच्या वजनानें तोलून धरिलें हें उघड आहे. दांडीचें वजन आणि पदार्थाचें वजन या दोनच प्रेरणा क च्या दोन बाजूंस कार्य करीत आहेत. या करितां त्यांचीं क भोंवतालचीं भ्रामकत्वें समान असलीं पाहिजेत.



$$\therefore \text{प}.\text{बक} = \text{न}.\text{कग} = \text{न}(\text{बग} - \text{बक}).$$

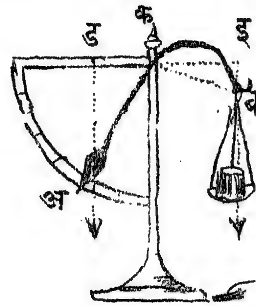
$$\therefore \text{प}.\text{बक} + \text{न}.\text{बक} = \text{न}.\text{बग}.$$

$$\therefore \text{बक} = \frac{\text{न}}{\text{प}+\text{न}}.\ \text{बग}.$$

आतां प = न, २न, ३न, ४न इत्यादि घेतल्यानें बक = $\frac{1}{2}$ बग, $\frac{1}{3}$ बग, $\frac{1}{4}$, बग $\frac{1}{5}$, बग इत्यादि होतील म्हणून जेव्हां क टेंकू $\frac{1}{2}$ बग ठिकाणीं असेल तेव्हां प = न म्हणजे पदार्थाचें वजन न च्या बरोबर होईल. तसेंच $\frac{1}{3}$ बग, $\frac{1}{4}$ बग इत्यादि ठिकाणीं क असतां न च्या दुप्पट, तिप्पट पदार्थाचें वजन असेल म्हणून बगचे $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ इत्यादि भाग पाडून त्या ठिकाणीं १, २, ३, ४, इत्यादि आंकडे मांडिले म्हणजे ज्या आंकड्यावर टेंकू असेल, दांडीच्या वजनाच्या तितके पट पदार्थाचें वजन आहे असें समजावें. पोटभाग पाहिजे असल्यास प = $\frac{1}{2}$ न, $\frac{5}{2}$ न $\frac{15}{2}$, न अशा किमती घेऊन पाडावे.

ही गोष्ट ध्यानांत ठेवण्याजोगी आहे कीं, प च्या किमती गणितप्रमाणांत असल्या तर ब पासून छेदांचीं अंतरें गायनप्रमाणांत असतात.

(११८) वांकड्या उच्चालकाचा पत्रें वगैरे लहान पदार्थ वजन करण्याचा तराजू– पत्रें वगैरे पदार्थांचीं वजनें करण्याचा हा लहानसा तराजू असतो. **अकब** हा वांकडा उच्चालक **क** टेंकूवर फिरता आहे. याच्या **ब** टोंकास पत्रें वगैरे अडकविण्याचा आंकडा किंवा पारडें आहे. दुसरें टोंक **अ** अणकुचीदार आहे. **अ** जवळ उच्चालकास जाड गांठ आहे, व त्या गांठीत **अ** पासून जवळच उच्चालकाचा गुरुत्वमध्य आहे. अणकुचीदार टोंकाखालीं वर्तुळाकार भाग पाडलेली पट्टी आहे. **ब** स लाविलेल्या पारड्यांत पदार्थ घातला कीं, तें खालीं कलतें आणि **अ** कांटा वर्तुळपादावरून वर सरतो. पारड्यांत १, २, ३, ४ तोळ्यांचीं अनुक्रमें वजनें घालून **अ** टोंक ज्या ठिकाणीं स्थिर राहतें त्या त्या ठिकाणीं छेद पाडितात. परंतु हे छेद गणित करूनही पाडितां येनात.



उच्चालकाचें वजन **व** घेऊं **ब** स लाविलेल्या पारड्याचें वजन **वे** घेऊं. पारड्यांत प वजनाचा पदार्थ घातला असतां **अक** भुजा ज्या उभ्या खांबावर उच्चालक आहे, त्याशीं जो कोन करितें तो θ आहे असें कल्पूं. उच्चालकाचें वजन **अ** जवळच्या त्याच्या गांठीतील गुरुत्वमध्यांतून दिक् रेषेंत कार्य करील. व आणि प + वे यांच्या कार्य करण्याच्या दिशांवरील **क** पासून लंब **कड** आणि **कइ** काढ. आतां उच्चालक **क** वर समतोल आहे म्हणून प्रेरणांच्या **क** भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य अस-

ली पाहिजे.

$$\therefore \text{व.कड} - (\text{प}+\text{व}) \text{कइ} = ०$$

परंतु जर अक, बक भुजांच्या लांब्या न आणि म असल्या आणि अकब कोन काटकोन असला तर- कड = न.भु थ; कई म.कोभु थ.

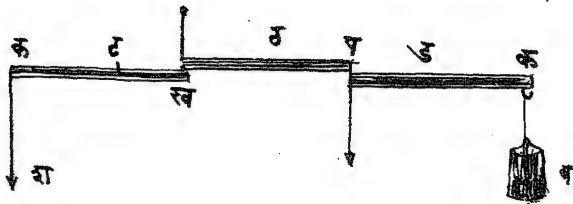
$$\therefore \text{व.न.भु थ} = (\text{प}+\text{व}) \text{म.को.भु थ.}$$

$$\therefore \text{स्प. थ} = \frac{(\text{प}+\text{व}) \text{म.}}{\text{व.न.}}$$

यावरून अ कोनाची किंमत व्यक्त अक्षरांत मिळाली. यास्तव प च्या किमती निरनिराळ्या धरिल्यानें अ च्या किंमती येतील, व त्यांवरून वर्तुळ पादाचे भाग पाडितां येतील. व्यवहारांत बहुतेक प्रथम सांगितल्या रीतीनेंच भाग पाडितात.

(११९) जेव्हां अनेक सरळ उच्चालकांची सांगड केलेली असते तेव्हां अशा सांगडीच्या समतोलत्वाचा नियम काढणें.

करव, रवप आणि पफ अशा तीन उच्चालकांची सांगड आहे. त्याचे टेंकू ट, ठ आणि ड आहेत. ही सांगड श आणि व या मेण्णांनीं समतोल आहे.



करव उच्चालकास क ठिकाणीं श शक्ति लाविलेली आहे. व दुसरें टोंक रव-दुसऱ्या रवप उच्चालकास जोडलेलें आहे. दोहोंच्या जोडाच्या रव ठिकाणीं म दाब पडत आहे असें कल्पूं. तसेंच क जो

ड्याच्या ठिकाणीं न दाब पडत आहे असें समजूं.

कटखव, खवठप, आणि पडफ हे तीनही उच्चालक समतोल आहेत म्हणून.

श × कट = म × टख, $\frac{श}{म} = \frac{टख}{कट}$.

म × खव = न × ठप, $\frac{म}{न} = \frac{ठप}{खठ}$.

न × पड = व × डफ, $\frac{न}{व} = \frac{डफ}{पड}$

या तिहींचा गुणाकार करून.

श × कट × खठ × पड = व × टख × ठप × डफ.

किंवा $\frac{श}{व} = \frac{टख × ठप × डफ}{कट × खठ × पड}$.

म्हणजे शक्ति व शक्तीच्या सर्व भुजा यांचा गुणाकार वजन व वजनाच्या सर्व भुजा यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

उदाहरणें.

(१) पांच फूट लांबीच्या कख या सरळ उच्चालकाच्या कख टोंकांपाशीं ४ आणि ६ शेरांचीं वजनें टांगिलीं आहेत, तर याचा टेंकू कोठें असेल व त्यावर दाब किती असेल.

उ० क पासून ३ फुटांवर, १० शेर दाब.

(२) पहिल्या वर्गाच्या उच्चालकाच्या भुजा ७ : ९ या प्रमाणांत आहेत व टेंकूवर दाब २६ शेरांचा आहे, तर दोहोंकडे किती दाब होता तें काढ?

उ० २०$\frac{?}{?}$ आणि १५$\frac{?}{?}$ शेर.

(३) समरूप असा १५ फूट लांबीचा दांडा एका टोंकापासून

४ फूट अंतरावरच्या एका बिंदूवर समतोल राहण्यास दुसऱ्या शेवटास ३ शेरांचे वजन लावावें लागतें, तर दांड्याचें वजन काय असेल?

उ॰ २$\frac{३}{५}$ शेर.

(४) कखग हा एक सरळ उच्चालक आहे, कखची लांबी = ७ इंच आणि खगची = ३ इंच आहे. ६ शेर व १० शेर अशीं वजनें क आणि ख बिंदूपासून टांगिलीं आहेत, आणि ग ठिकाणीं ६ शेरांची प्रेरणा उलट दिशेनें कार्य करीत आहे, तर याचा टेंकू कोठें असला म्हणजे या प्रेरणांच्या कार्यानें तो समतोल राहील व त्यावर दाब किती असेल?

उ॰ क पासून १ इंचावर; १० शेर.

(५) ७ फूट लांबीचा उच्चालक क्षितिजपातळीशीं समांतर असा दोन टोंकाखालीं दोन टेंकावे देऊन ठेविला आहे. यावर २८ शेरांचें वजन कोठें ठेविलें असतां एका टेंकाव्यावर त्यापैकीं ८ शेरांचा दाब पडेल?

उ॰ दुसऱ्या टेंकाव्यापासून २ फूट अंतरावर.

(६) टेंकूवर १५ शेरांचा दाब आहे आणि उच्चाल्य व उच्चालक वजनांचें अंतर ३ शेर आहे तर दोन्हीं वजनें व भुजांमधील प्रमाण काढ?

उ॰ ९ व ६ शेर, प्रमाण २ : ३.

(७) क आणि ख या प्रेरणांच्या कार्यापासून उच्चालक समतोल आहे. तसेंच कची तिप्पट केली आणि ख ६ शेरांनी वाढविली, तरी तो समतोल राहतो तर खचें परिमाण काढ?

उ॰ ३ शेर.

(८) १० फूट लांबीचा दुसऱ्या वर्गाचा उच्चालक आहे. यांत १२ शेरांची शक्ति आणि १५ शेर वजनास तोलून धरिते. तर वजन कोठें लावावें?

उ. टेंकूपासून ८ फुटांवर.

(९) ताजव्याच्या एका पारड्यांत पदार्थ घातला तेव्हां त्याचें वजन ८ शेर भरलें, आणि दुसऱ्या पारड्यांत घातला तेव्हां त्याचें वजन ४ $\frac{1}{2}$ शेर भरलें, तर त्याचें खरें वजन काय?

उ. ६ शेर.

(१०) पांच उच्चालकांची एक सांगड आहे. त्यांच्या भुजा अनुक्रमें १२ व ३, ७ व ४, २५ व ५, १७ व ७, आणि २० व ४ अशा आहेत. यांपासून यांत्रिक स्वार्थ काय प्राप्त होईल तें सांग?

उ. ४२५.

(११) एका बोटीचें आवलें १५ फूट लांब आहे, ज्या टोंकापासून हातानें वलें चालवितों त्या टोंकापासून बोटीस अडकविलेलें ठिकाण ३$\frac{1}{2}$ फूट अंतरावर आहे. तर वलें मारणाराचा जोर आणि बोटीचा प्रतिबंध यांत प्रमाण काय असेल?

उ. २३ : ३०

(१२) एक मनुष्य चरक पायांनीं चालवीत आहे. जेथें पायांनीं दाबितो तें ठिकाण टेंकूपासून २ फूट अंतरावर आहे व ज्या टोंकापाशीं चरकाचा प्रतिबंध घडतो, तें टोंक टेंकूपासून ५ फुटांवर आहे तर चरक चालविण्यास किती शक्ति लागते?

उ. ५० शेर.

(१३) ४ शेर वजनाचा पदार्थ खोट्या तराजूच्या एका पारड्यांत घातला तेव्हां त्यांचे वजन २ शेर भरलें तर तोच पदार्थ दुसऱ्या पारड्यांत घातला तर त्याचें वजन किती भरेल?

उ. ८ शेर.

(१४) एका वांकड्या उच्चालकांत टेंकूपासून शक्तीच्या कार्यमार्गावर जो लंब पडतो तो ११ फूट आहे, आणि वजनाच्या कार्यमार्गावर ५ फूट आहे. वजन २२० शेर असेल तेव्हां शक्ति किती अ-

सावी.

उ. १०० शेर.

(१५) खिळे काढण्याची चिरलेली हातोडी असते. हातोडीच्या दांड्याची लांबी २१ इंच आहे. हातोड्याच्या डोक्यापासून खिळे धरण्याची जागा ३ इंच लांब आहे. तर अशा हातोडीनें खिळे काढण्यांत किती यांत्रिक स्वार्थ प्राप्त होईल.

उ. ७.

(१६) उच्चालकाच्या एका भुजेवर टेंकूपासून ६, १२ आणि १८ इंच अंतरांवर १, २, आणि ३ शेर अशी वजनें अनुक्रमें टांगिलीं आहेत आणि दुसऱ्या भुजेवर टेंकूपासून ४, १० आणि १२ इंच अंतरांवर २, ३, आणि ४ शेरांचीं वजनें टांगिलीं आहेत, तर आणखी १ शेराचें वजन कोठें टांगावें म्हणजे उच्चालक समतोल राहील तें काढ?

उ. पहिल्या भुजेवर टेंकूपासून २ इंचांवर

(१७) एका गृहस्थानें २ शेर साखर विकत घेतली, परंतु त्यास तराजूंत कांहीं लबाडी असल्याचा संशय आला. म्हणून त्याणें १ शेर एका पारड्यांत व दुसरा शेर दुसऱ्या पारड्यांत वजन करून घेतला. तराजूच्या भुजा ६ : ५ या प्रमाणांत आहेत असें कल्पिल्यास त्यास असें केल्यापासून किती नफा किंवा तोटा झाला तें सांग?

उ. $\frac{1}{30}$ शेर नफा.

(१८) एक आबडधोबड तुळी २४ फूट लांब आहे. तिच्या जड शेवटापासून १० फुटांवर जर टेंकू दिला तर त्यावर तुळी समतोल राहते. परंतु जर तो टेंकू मध्यबिंदूवर सारिला तर हलक्या शेवटावर १०० शेर वजनाचा मनुष्य बसावा लागतो व या शेवटापासून ४ फुटांवर १० शेरांचें वजन ठेवावें लागतें, तर तुळीचें वजन काढ?

उ. ६४० शेर.

(१९) वांकड्या उच्चालकाच्या भुजांमध्यें १५०° चा कोन आहे. त्याच्या टोंकांपासून ७ आणि ६ शेरांची वजनें टांगिलीं आहेत. भुजांच्या लांब्या ३ आणि ५ फूट आहेत, तर उच्चालक समतोल असेल तेव्हां क्षितिज पातळीशीं प्रत्येक भुजा किती अंशांचा कोन करितें तें काढ?

(२०) एक वांकडा उच्चालक टेंकूवर टांगिला म्हणजे समतोल स्थितींत त्याची आंखूड भुजा क्षितिज पातळीशीं समांतर राहते, परंतु या भुजेची लांबी दुप्पट केली तर दुसरी भुजा क्षितिज पातळीशीं समांतर राहते, तर भुजांच्या लांब्यांमधील प्रमाण काढ आणि त्यांमधील कोन काढ?

(२१) एक खोटा तराजू आहे व त्याच्या भुजा गुरुत्वशून्य आहेत, असें कल्पिलें. लांब भुजा आंखूड भुजेहून आंखूड भुजेच्या $\frac{१}{६}$ अधिक लांब आहे, आणि या तराजूनें साखर वजन करून घेतांना दोन्ही पारड्यांत साखर वेळ घालून साखर घेतली तर दुकानदाराचा या व्यापारांत शेंकडा $\frac{१}{६}$ तोटा होतो असें दाखीव?

(२२) वजन करण्याची साधी दांडी १८ इंच लांब आहे व तिचें वजन ३ शेर आहे व ती एका टोंकापासून तीन इंच अंतरावर टांगिली आहे. सरकविण्याचें वजन २ शेरांचें असलें तर अशा दांडीनें अत्यंत मोठ्या अशा केवढ्या वजनाच्या पदार्थाचें वजन करितां येईल.

उ. १६ शेर.

(२३) साधी वजन करण्याची दांडी १२ इंच लांब आहे. व पदार्थ घालण्याच्या पारड्यासकट दांडीचें वजन १ शेर आहे. पारडें लाविलें आहे त्या शेवटापासून २ इंचांवर दांडीचा गुरुत्वमध्य आहे. स-

रकविण्याचें वजन १ शेराचें आहे व दांडीनें अत्यंत मोठें म्हणजे १२ शे-
रांचें वजन करितां येतें. तर तिचा टेंकू कोठें असेल तें काढ?

उ. पारड्यापासून १ इंचावर.

(२४) साध्या दांडीवरील सरकविण्याचें वजन ६ औंसांचें आहे.
हें वजन अर्ध औंसानें कमी केलें तेव्हां एका पदार्थाचें वजन दांडीवरू-
न ६ पौंड भरलें. तर त्यांत विकत घेणाराचा किती तोटा झाला?

उ. $\frac{1}{2}$ औंस

(२५) डेनिश तराजूच्या दांडीचें वजन १ शेर आहे आणि ४ शे-
र व ५ शेर वजन काढण्याच्या खुणांमधील अंतर १ इंच आहे तर दां-
डीची लांबी किती?

उ. ३० इंच.

(२६) २ **अबक** हा एक वाकडा उच्चालक आहे. याच्या **कअ** आ-
णि **कब** या भुजा सरळ असून त्यांमधील कोन १३५° चा कोन आहे. तेव्हां
कअ भुजा क्षितिजपातळीशीं समांतर असते. तेव्हां **ब** टोंकास लावि-
लेल्या **ब** वजनास समतोल धरण्यास **अ** टोंकास **क** वजन लावावें लागतें आ-
णि **कब** क्षितिजपातळीशीं समांतर असतो तेव्हां **अ** टोंकास **ख** वजन
लावावें लागतें तर **क** आणि **ख** यां मधील प्रमाण काढ?

उ. **ख** —— २**क**.

(२७) ४८ शेर वजनाच्या एकासमरूप दांड्याच्या एका टोंकाखा-
लीं टेंकावा दिला आहे, तर दुसऱ्या टोंकापासून २ फूट अंतरावर वर-
च्या बाजूस दिक् रेषेंत कार्य करण्यास केवढें वजन लावावें म्हणजे दां-
डा क्षितिज पातळीशीं समांतर राहील?

उ. ३० शेर.

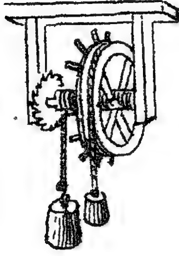
प्रकरण ९.

चाक व कणा
किंवा
कण्यास खिळलेलें चाक.

(१२०) पदार्थास चलन देण्याचा उच्चालकाचा व्यापार थोडा थोडा आणि विसाव्यानें घडतो नरफ लावून एकादा धोंडा किंवा तुळी उचलावयाची असली, तर नरफ खालीं दाबून ती जमिनीस येऊन टेंकली, म्हणजे नरफेस पुनः पूर्व स्थितीवर आणावें लागतें आणि या काळांत धोंडा किंवा तुळी जितकी वर चढली असेल, तेथें दुसऱ्या उपायानें उचलून धरावें लागतें. म्हणून कोणतेंही वजन पुष्कळ उंच उच्चालकानें एक सारखें उचलितां येत नाहीं. जेव्हां थोड्या शक्तीनें मोठें वजन थोड्या उंचीवर उचलावयाचें असतें तेव्हां मात्र उच्चालकाचा उपयोग करितात आणि अशा वेळीं मात्र इच्छित फल प्राप्त होतें.

पदार्थ हवा तितका उंच उचलितां यावा आणि हें कार्य अखंड करितां यावें या करितां कण्यास खिळलेल्या चाकाची योजना आहे. चाकास कणा असा बळकट व पक्का बसविलेला असतो कीं दोन्ही एकदम फिरतात. शक्ति चाकाच्या परिघास लावितात आणि वजन कण्यास लावितात. दोंहोंच्या साधारण आंसांचीं टोंकें दोन टेंकूंवर अशीं बसविलेलीं असतात कीं, त्यांवर आंस खेळता व फिरता असतो. चाकास दोरीनें किंवा सांखळीनें चाकाच्या परिघावर दोरी किंवा सांखळी कोठें तरी अडकवून गुंडाळतात आणि तिला शक्ति लावितात, आणि कण्यावर दोरी किंवा सांखळी उलट्या दिशेनें गुंडाळून तिला वजन टांगितात. खालील आकृतींत ही रचना दाखविली आहे. चाकास लाविलेल्या शक्तीनें चाक फि-

रलें म्हणजे त्यास खिळलेला कणाही फिरतो. चाकाचा एक फेरा झाला



नर कण्याचाही एकच फेरा होतो. चाकास लाविलेल्या शक्तीनें जर चाकावर दोरी गुंडाळली, तर आंसावरील उलगडेल आणि चाकावरील उलगडली तर आंसावरील गुंडाळेल. आंस व चाक यांचे फेरे सारखे होतात म्हणून चाकावरील दोरी त्यास लाविलेल्या शक्तीच्या योगानें एका फेऱ्यांत त्याच्या परिघा इतकी उलगडली, तर कण्यावरील दोरी एका फेऱ्यांत आंसाच्या परिघा इतकी त्यावर गुंडाळेल, म्हणजे आंसाच्या परिघा इतक्या उंचीतून वजन चढेल. या वर्णना वरून असें लक्षांत येईल कीं, यंत्रावर विरुद्ध प्रेरणांचें कार्य होतें आणि त्याविरुद्ध रीतीनें लागू होतात. या दोन्ही प्रेरणा साधारण आंसापासून निरनिराळ्या अंतरावर लागू होतात. आंसाच्या त्रिज्ये इतक्या अंतरावर वजन लागू होतें, आणि चाकाच्या त्रिज्ये इतक्या अंतरावर शक्ति लागू होते. चाकावरच्या दोरीस कांहीं जोराचा हिसका देऊन चाक एकवेळां फिरविलें, तर चाकाच्या एका वेढ्याबरोबर कण्याचा एक वेढा होईल. यामुळें ज्या दोरास वजन टांगिलें असतें, तो दोर कण्या भोंवता एकवेळ गुंडाळेल व तेणेंकरून कण्याचा परीघ जितका असेल तितकेंच वजन वर चढेल. यास्तव चाकाच्या परिघास जसा कण्याचा परीघ तसा शक्तीच्या वेगास वजनाचा वेग असेल. चाक आणि कणा यांमधील प्रमाणा इतकें जर शक्ति आणि वजन यांमध्ये प्रमाण असलें तर यंत्र समतोल राहील. म्हणून चाकाचा परीघ किंवा व्यास आणि कण्याचा परिघ किंवा व्यास यांमध्यें जें प्रमाण असतें तें यंत्राची शक्ति किंवा यांत्रिक स्वार्थ दाखवितें. उदाहरणार्थ जर चाकाचा व्यास १२ इंच आणि कण्याचा व्यास १ इंच असला तर एक शेराची शक्ति चाकास लाविली असतां ती कण्यावर १२ शेर वजनास तोलून धरील. याहून किंचित जास्त प्रेरणा

चाकास लागू केली कीं, कण्यासहीत चाक फिरेल; आणि वजन उचलेल. चाकाची त्रिज्या च आणि कण्याची त्रिज्या क कल्पिली तर असें समाण होईल.

$$श : व :: क : च, \text{ किंवा } श \times च = व \times क.$$

या स्थळीही हें लक्षांत ठेवावें कीं, या यंत्रांत कांहीं नवीन शक्ति उत्पन्न होत नाहीं व जितकी शक्ति खर्च होते तितकेंच काम होतें. म्हणजे दोहोंची चालकत्वें समान राहतात. १ शेराची शक्ति जर १२ इंच अवकाशांतून खालीं आली, तर १२ शेरांचें वजन फक्त १ इंच अवकाशांतून चढतें. या यंत्रापासून फायदा हाच कीं, एक शेराच्या शक्तीनें थोड्या अवकाशांतून कां होईना, पण १२ शेरांचें किंवा त्याहून जास्त वजन उचलितां येतें.

(१२१) कण्यास खिळलेल्या चाकाच्या समतोलत्वाचा नियम प्रेरणांच्या नियमांवरून काढणें.

श आणि व या प्रेरणा दिक् रेषेंत कार्य करितात. श चाकाच्या एका बिंदुपासून आणि व आंसाच्या एका बिंदुपासून कार्य करितात. यांच्या दिशा चाक व कणा यांच्या परिघांच्या स्पर्शरेषा आहेत म्हणून स्पर्शबिंदूंपासून अनुक्रमें चाकाच्या मध्यबिंदूपर्यंत आणि कण्याच्या मध्य बिंदू पर्यंत रेषा काढिल्या तर ते त्या आंसापासून श आणि व यांच्या कार्य करण्याच्या दिशांवर लंब होतील ज्यापेक्षां या प्रेरणांनीं सर्व यंत्र आसरूपी रेषेवर समतोल आहे त्यापेक्षां त्यांच्या आंसा भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे म्हणून चाक आणि कणा यांच्या त्रिज्या च आणि क कल्पिल्या तरः—

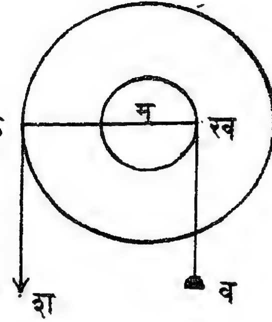
$$श \times च = व \times क, \text{ किंवा } \frac{श}{व} = \frac{क}{च}$$

म्हणून जेव्हां कण्यास खिळलेलें चाक समतो-

रु असेल तेव्हां शक्तीस जसें वजन तसें आंसाच्या त्रिज्येस चाकाची त्रिज्या असें प्रमाण असेल.

कण्यास खिळलेलें चाक हा एक वास्तविक उच्चालकाचाच प्रकार आहे. एकाच आंसावर असलेल्या अनेक उच्चालकांचा समुदाय हा असतो. यांपैकीं एका उच्चालकावर कार्य घडतें या प्रमाणें उच्चालकानें सतत कार्य घडतें म्हणून चाक आणि कणा हा एक सततवर्ती उच्चालक असतो. आणि यापासून यांत्रिक स्वार्थ कोणत्याही साधारण उच्चालकापेक्षां फार घडतो. आतां चाक आणि कणा यांचा व्यापार उच्चालकासारखा कसा होतो आणि वरील समतोलत्वाचा नियम त्यावरून कसा निघतो हें सांगतों.

चाक व कणा यांच्या साधारण आंसाशीं लंब अशा पातळीनें छेदिल्यास जें यंत्राचें छिन्न होईल, तें खालील आकृतींत दाखविलें आहे. या छिन्नांत दोन समकेंद्र वर्तुळें आहेत व त्यांचा साधारण मध्य म आहे.



शक्ति आणि वजन या प्रेरणा आंसाशीं लंब अशा पातळींत कार्य करितात असें समजल्यानें, त्यांच्या कार्यांत फरक पडणार नाहीं.

ज्या दोरीच्या योगानें शक्तीचें कार्य घडतें ती दोरी चाकाच्या परिधाच्या क बिंदुपासून खालीं लोंबते. आणि ज्या दोरीनें वजनाचें कार्य घडतें ती कण्याच्या परिधाच्या ख बिंदुपासून खालीं लोंबते. **कश** आणि **खव** या **श** आणि **व** या प्रेरणांचा कार्य करण्याचा मार्ग दर्शविणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या स्पर्शरेषा होतील. म्हणून **मक** आणि **मख** हे त्यांवर लंब होतील. यास्तव जर **कमख** हा एक उच्चालक कल्पिला आणि त्याचा **म** हा टें-

कू कल्पिला तर त्यावर क श आणि खब या समांतर प्रेरणा कार्य क-रितात म्हणून उच्चालकाच्या समतोलत्वाच्या नियमा प्रमाणें (क-१०७)

$$\frac{श}{ब} = \frac{खम}{कम}$$

खम आणि कम या अनुक्रमें कणा व चाक यांच्या त्रिज्या आहेत. त्या क आणि च घेतल्या तर सारणी अशी होईल.

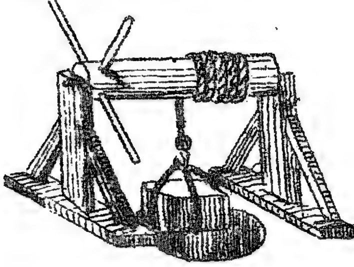
$$\frac{श}{ब} = \frac{क}{च}$$

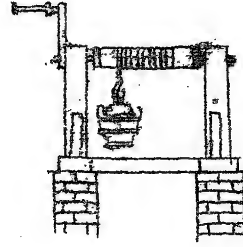
जर दोऱ्यांची जाडी हिशेबांत घेतली तर प्रत्येकाची त्रिज्या दो-रीच्या निम्म्या जाडीनें वाढवावी लागेल. म्हणजे चाकाच्या व कण्याच्या त्रिज्यांत दोरीची अर्धी जाडी मिळवावी लागेल.

वर सांगितल्या प्रकारच्या चाक व कण्यांत एका बाजूस शक्ति आणि समोरच्या बाजूस वजन कार्य करिते म्हणून कणा ज्या टेंकूवर अ-सेल त्यावर एकंदर दाब दोहोंच्या बेरजे बरोबर होईल; परंतु शक्ति आणि वजन एकाच बाजूस कार्य करितील आणि शक्तीचें कार्य वरच्या दिशेनें व वजनाचें खालच्या दिशेनें होत असेल तर एकंदर दाब दोहोंच्या व-जाबाकी बरोबर असेल. प्रचारांत शक्ति आणि वजन जरी त्रिज्याशींलं-ब अशा दिशांत कार्य करितात तरी त्यांच्या दिशा सर्वदा परस्पर समांतर नसतात. अशा वेळीं टेंकूवरील दाब प्रेरणा समांतरभूज चौकोनाच्या नि-यमानें काढावा.

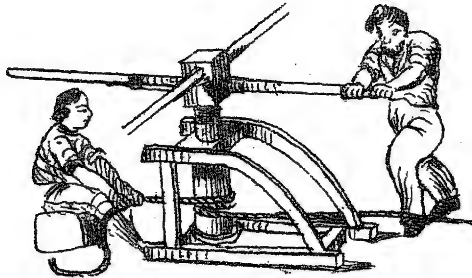
(१२२) या यंत्रांत शक्ति लागू करण्याच्या अनेक तऱ्हा असतात. शक्तीची योजना चाकाच्या द्वारानें कण्यावर करावी, ती कधीं कधीं तशी न करितां कण्यास एक दांडा बसवितात, तो उच्चा-लकाचें काम करितो. त्याच्या याटोळ्या फिरण्यानें चाकाचें काम होतें. या यंत्राचा उपयोग खोल विहिरींतून पाणी काढण्यास आणि उंच ठि-काणीं दगड उचलण्यासही करितात. कधीं कधीं कण्यास सारख्या

अंतरावर चार पांच भोकें पाडून त्यांत खुंट्या बसवून त्या खुंट्या मनुष्यें हातांनीं फिरवून कण्यास गति देतात.



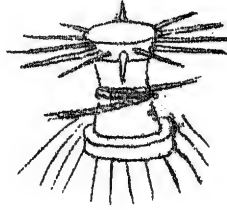


अशा खुंट्या कण्याच्या दोहों टोंकासही लावून दोहोंकडे फिरवितात. यातल्याचें उत्कृष्ट उदाहरण आपला पाणी काढण्याचा रहाट होय. तसेंच मोठ्या गलबताचें सुकाणू हालविण्याचें चाक असलें असतें. वरच्या दोन रचनेंत कणा आडवा असतो, व त्यास शक्ति लंब दिशेंत लागू होते. मोठ्या गलबतावरील नांगर ओढण्याचें व शीड चढविण्याचें जें असलें यंत्र असतें त्याचा कणा उभा असतो, व त्यास शक्ति आडवी लागू करितात.



गलबताच्या तळावर किंवा दुसऱ्या मजल्यावर कणा वरील आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें उभा बसविलेला असून त्याच्या वरच्या शेवटापाशीं समोरासमोर आरपार भोंकें पाडून दोन लांब दांडे

बसवितात किंवा कणा गोल असून त्यास सभोंवार अनेक भोंकें पा-
डून अनेक खुंटे बसवितात. प्रत्येक दां-
ड्यास एक किंवा दोन मनुष्यें वाटोळें
फिरवितात. हे दांडे फिरतात त्या प्रमा-
णें उभा कणाही फिरतो. आणि तेणेंक-
रून नांगराचा दोर किंवा सांखळी क-
ण्या भोंवती गुंडाळली जाऊन नांगरज-



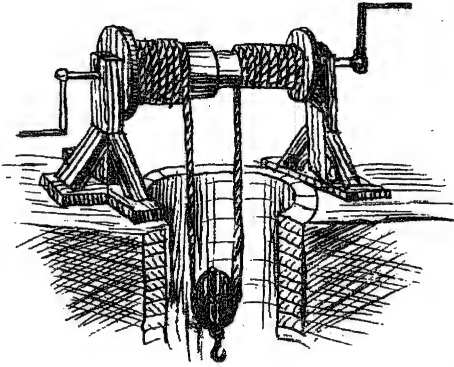
वळ येतो. कामकरावयाचें नसतें तेव्हां दांडे काढून ठेवितात. उसा-
चा रस काढण्याचा घाणा हें याच प्रकारचें उदाहरण होय. यांत क-
ण्यावर दोर गुंडाळून नसून त्याच्या फिरण्यानें दुसरा कणा फिरतो. प्रा-
चीन काळीं जेव्हां झालींच्या यान्या कप्प्या आणि भिन्नचक्ररूप यंत्रें नव्ह-
तीं तेव्हां मोठे मोठे दगड उंच इमारतीवर चढविण्यास अशा अनेक यं-
त्रांचा उपयोग करीत.

अशा यंत्राचें सामर्थ्य काढते वेळीं पूर्वीं सांगितल्या नियमा प्रमाणेंच प्रमाणे घ्यावयाचीं. चाकाच्या त्रिज्येच्या ठिकाणीं क-
ण्याची त्रिज्या आणि त्यास लाविलेल्या दांड्याची लांबी यांची बे-
रीज घेण्याची:- दहा दांडे असून प्रत्येकास एक प्रमाणें १० मनुष्यें
लाविलीं असलीं तर सर्व शक्ति १० मनुष्यांच्या शक्तीबरोबर घ्या-
वयाची. असलीं १० यंत्रें एकच दगड उचलावयास लाविलीं अ-
सल्यास एकंदर शक्ति १० पट होईल.

समजा कीं; कण्याची त्रिज्या ६ इंच आणि दांड्याची लांबी ५½ फूट आहे. तर एकंदर चाकाची त्रिज्या ७२ इंच झाली म्हणून
कणा आणि चाक यांच्या त्रिज्यांत प्रमाण १ः १२ असें आहे. जर
प्रत्येक मनुष्याची शक्ति २०० शेर धरिली तर १० मनुष्यांची २०००
होईल. आणि इतक्या शक्तीनें वरच्या यंत्रानें २४००० शेरांचें वज-
न उचलितां येईल.

(१२३) संयुक्त चाक व कणा– चाक व कणा यांचा यांत्रिक स्वार्थ चाकाची त्रिज्या आणि कण्याची त्रिज्या या दोहोंमधील प्रमाण जसें मोठें होईल, तसा मोठा होतो. या यंत्राची शक्ति वाढविण्यास चाकाची त्रिज्या वाढवावी किंवा कण्याची त्रिज्या कमी करावी. शक्तीपेक्षां अतिशय मोठें वजन उचलावयाचें असलें आणि जर चाकाची त्रिज्या कायम ठेविली तर कणा फार बारीक करावा लागेल, व अशानें कदाचित तो वजनाचा भार सहन करणार नाहीं. अथवा कणा कायम ठेवून जर चाकाची त्रिज्या फार मोठी केली तर शक्ति अतिशय मोठ्या स्थळांतून लागू करावी लागेल, आणि यंत्र फार अवजड होईल.

या दोनही अडचणी चुकवून इष्टकार्यभाग साधण्याकरितां संयुक्त चाक व कणा यांची योजना करितात. कण्याचे दोन भाग भिन्न भिन्न जाडीचे करून चाकास खिळवितात, किंवा दांड्यानें तसला कणा फिरवितात. आणि येणेंकरून यंत्राच्या अंगीं हवी तितकी बळकटी राहून तें अवजड होत नाहीं आणि त्याचें यांत्रिक सामर्थ्यही वाढतें. असलें यंत्र या आकृतींत दाखविलें आहे. कण्याच्या एका भागाचा व्यास दुसऱ्याच्या व्यासापेक्षां कमी आहे. एक दोर कण्याच्या बारीक भागास गुंडाळून त्याचें दुसरें टोंक एका कप्पीच्या खांचेवरून नेऊन कण्याचे जाड भागास उलटें गुंडाळलें आहे. उच-



लावयाचें वजन दोरांत ओवलेल्या कप्पीस टांगिलें आहे. जाड भागा-वर दोर गुंडाळला जावा असा कणा फिरविला म्हणजे अर्थातच तो बा-रीक भागावरून उलगडतो. चाकाचा एक फेरा झाला म्हणजे जाड्या भा-गाच्या परिघा इतका दोर वर येतो. आणि बारीक भागाच्या परिघा इ-तका दोर खाली जातो. याभुळें यंत्राचा एक फेरा झाला म्हणजे क-ण्याचा जाडा व बारीक भाग यांच्या परिघांच्या अंतरा इतका दोर वर येतो, व तितकें वजन वर चढतें. येणेंकरून जाड व बारीक या भागां-च्या व्यासांच्या अंतरा इतक्या बारीक व्यासाचा कणा लाविल्यापा-सून जें कार्य झालें असतें तसें कार्य या संयुक्त कण्यापासून होतें, व यंत्राची बळकटी कमी होत नाहीं. म्हणून कण्याची जाडी कमी नकरितां जाड व बारीक भागांच्या व्यासांमधील अंतर हवें तित-कें कमी करून यांत्रिक स्वार्थ म्हणजे शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण हवें तितकें वाढवितां येतें.

(१२४) संयुक्त चालक व कणा यांच्या सम-तोलत्वाचा नियम काढणें— कण्याच्या जाड व बारीक भा-गांच्या त्रिज्या अनुक्रमें क, कै घेऊं आणि चाकाची त्रिज्या किंवा कण्यास लाविलेल्या दांड्याची कण्याच्या आंसापासून लांबी च घे-ऊं. कण्याच्या आंसा भोंवती यंत्र समतोल आहे म्हणून आंसा भोंव-तालच्या प्रेरणांच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. वज-नकप्पीवरून गेलेल्या दोरीच्या दोहों भागांनीं उचललें आहे. सलग दो-रीचा ताण सर्वत्र सारखा असतो. (क. १२ पहा.) म्हणून प्रत्येक भागास म्ह-णजे जाड भागावरील व बारीक भागावरील दोरीस $\frac{२}{}$ व वजन टांगिल्या प्रमाणें आहे. जाड भागावर दोरी गुंडाळते म्हणून त्यास लाविलेल्या व-जनाचें भ्रामकत्व शक्तीच्या भ्रामकत्वाशीं विजातीय, आणि बारीक भा-गावरील दोरी उलगडते म्हणून तीस लाविलेल्या वजनाचें भ्रामकत्व स-जातीय होईल म्हणून—

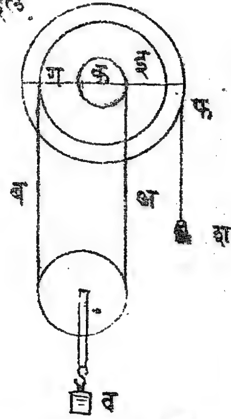
$$श \times च + \frac{1}{2} व.कै - \frac{1}{2} वके \quad ०$$

$$श च = \frac{1}{2} वके - \frac{1}{2} वकै$$

$$शच = \frac{1}{2} व(के - कै).$$

$$\text{किंवा} \quad \frac{श}{व} = \frac{के - कै}{२च}$$

(१०७) या आकृतींत यंत्राचें चित्र दाखविलें आहे, त्यावरून वरील सिद्धांत अधिक स्पष्टपणें ध्यानांत येईल.



यांत व वजनास दोराचे अ आणि ब भाग उचलून धरितात, म्हणून त्यांतील प्रत्येक भाग व वजनाच्या अर्धानें ताणिला जातो. जसजसें यंत्र फिरतें, त्या प्रमाणें कण्याच्या बारीक भागापासून जाड्या भागाकडे दोर जातो. अतिमोठ्या वर्तुळाभोंवती म्हणजे चाकाभोंवती जो दोर गुंडाळिला आहे. त्यास शक्ति लाविली आहे. श आणि $\frac{व}{२}$ या प्रेरणा फ आणि इ स्थळीं एकाच दिशेस लाविलेल्या आहेत. दुसरी $\frac{व}{२}$ प्रेरणा ग स्थळीं कण्याच्या दुसऱ्या बाजूस उलट दिशेनें लाविली आहे. ग स्थळीं उलट दिशेनें म्हणजे वरच्या बाजूस कार्य करणाऱ्या $\frac{व}{२}$ प्रेरणेस $\frac{व}{२}$ आणि श या इ आणि फ स्थळीं कार्य करणाऱ्या प्रेरणा क बिंदूवर तोलून धरितात. म्हणून गक इफ हा उच्चालक क टेंकूवर समतोल आहे. म्हणून कच्या दोहों बाजूंच्या प्रेरणांची क सभोंवतालचीं भामकलें समान असलीं पाहिजेत. प्रेरणांच्या दिशांवर कग, कफ लंब आहेत आणि कफ = च, कग = के, आणि कइ = कै धरिलें तर:—

$$श \times च + \frac{1}{2} वकै = \frac{1}{2} वके; \; शच = \frac{1}{2} व(के - कै)$$

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{के - कै}{२च} = \frac{1}{2} \times \frac{के - कै}{च}.$$

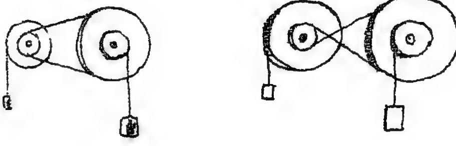
यावरून असें झालें कीं, शक्तीस चाकाच्या त्रिज्येनें गुणिलें असतां जो गुणाकार येईल तो अर्ध वजनास कण्याचा जाडा व बारीक भाग यांच्या त्रिज्यांच्या अंतरानें गुणून जो गुणाकार येईल त्या बरोबर असतो.

कड आणि कग म्हणजे के आणि के यांमधील अंतर अत्यंत लहान करून विवक्षित शक्तीनें हवें तेवढें वजन उचलितां येईल.

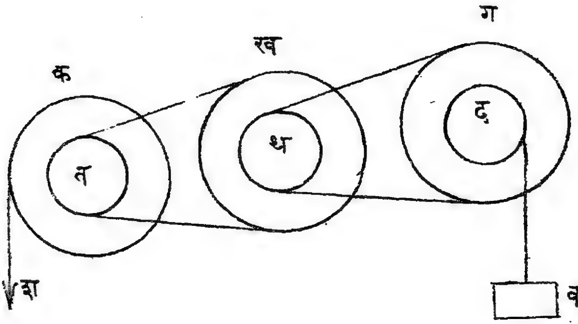
(१२६) अनेक चाकें व कणे यांची सांगड—जेव्हां नियमित शक्तीनें यंत्राच्या आंगीं फार सामर्थ्य आणावयाचें असतें तेव्हां अनेक उच्चालकांच्या सांगडीप्रमाणें अनेक चाकें व कणे यांची सांगड करितात. पहिल्या चाकावर शक्ति लावितात. या चाकाच्या फिरण्यानें याचा कणा फिरतो. या कण्याच्या फिरण्यानें दुसऱ्या चाकास फिरवितात, व तेणेंकरून त्याचा कणा फिरतो. या दुसऱ्या कण्याच्या फिरण्यानें तिसरें चाक फिरवितात, व त्याजबराबर त्याचा कणा फिरतो. या प्रमाणें हवीं तितकीं चाकें व कणे एकत्र जोडितात, आणि शेवटल्या कण्यास वजन लावितात.

एका चाकाच्या फिरण्यानें दुसऱ्यास फिरविण्यासाठीं म्हणजे एकाच्या गतीनें दुसऱ्यास गति देण्याकरितां अनेक रीतींचीं योजना करितात. परंतु सर्वांत साधारण रीति म्हटली म्हणजे पहिल्या चाकाच्या कण्याच्या परिघावर खांच पाडून त्यावरून दुसऱ्या चाकाच्या परिघावरील खांचेंत एक बळकट दोरी किंवा चामड्याचा चपटा पट्टा नेतात. दोरीचीं किंवा पट्ट्याचीं शेवटें एकत्र गांठवून किंवा शिवून त्या दोरीस किंवा पट्ट्यास सलग किंवा सतत वर्ति करितात. दोरी किंवा पट्टा यांचे पृष्ठभाग खरबरीत असतात आणि पहिल्याचा कणा व दुसऱ्याचें चाक यांच्या परिघाचे पृष्ठभाग खरबरीत असतात, यामुळें घर्षण घडून कण्याची गति चाकास मिळते. या रीतीनें फिरत असणाऱ्या दोन चाकांची सांगड खालील आकृतींत दाखविली

आहे. पहिल्या आकृतींत चाकें एकाच दिशेनें फिरतात व दुसऱ्या आ-



कृतींत दोरीस तिढा दिला असल्यानें चाकें परस्पर उलट दिशांनीं फिर-
तात. या आकृतींत अशा तीन चाकांची सांगड दाखविली आहे. आ-



ता अशा सांगडींतील **शक्ति** आणि **वजन** यांमधील प्रमाण कसें काढावें तें सांगतों.

(१२७) **क,ख,ग** ही तीन चाकें आणि त, थ, द हे तीन त्यांचे कणे आहेत. (मागील आकृतींत पहा.) **क** चाकास शक्ति लाविली आहे. **क** च्या **त** कण्यावरून आणि **ख** च्या चाकावरून एक सतत वर्तिसलग दोरी किंवा पट्टा नेऊन **क** आणि **ख** यांस जोडिलें आहे. पट्टा आणि परीघ याच्या घर्षणानें त कणा फिरतांच ख चाक फिरतें. तसेंच ख चा थ कणा आणि ग चाक यांस एका सतत वर्तिपट्ट्यानें जोडिलें आहे. आणि ग च्या द कण्यास वजन टां-

गिले आहे. कणा फिरल्यावर दोरीच्या आंगीं ज्या मानानें ताण येईल त्या मानानें दुसऱ्या चाकास गति मिळेल.

त आणि ख यांस जोडणाऱ्या पट्ट्याचा ताण ट, आणि थ आणि ग यांस जोडणाऱ्या पट्ट्यांचा ताण ठ आहेत असें कल्पूं. तर पहिलें चाक व त्याचा कणा यांवर श आणि ट या मरणांचें कार्य होत आहे. दुसऱ्यावर ट आणि ठ यांचें आणि तिसऱ्यावर ठ आणि व यांचें कार्य होत आहे.

प्रत्येक चाक समतोल आहे म्हणून (क. १२१ प्रमाणें) क, ख, ग या क, ख, ग या चाकांच्या त्रिज्या आणि त, थ, द या त, थ, द या कण्यांच्या त्रिज्या आहेत असें घेऊन—

$$\frac{श}{ट} = \frac{त \text{ कण्याची त्रिज्या.}}{क \text{ चाकाची त्रिज्या.}} = \frac{त}{क}$$

$$\frac{ट}{ठ} = \frac{थ \text{ कण्याची त्रिज्या.}}{ख \text{ चाकाची त्रिज्या}} = \frac{थ}{ख}$$

$$\frac{ठ}{व} = \frac{द \text{ कण्याची त्रिज्या.}}{ग \text{ चाकाची त्रिज्या}} = \frac{द}{ग}$$

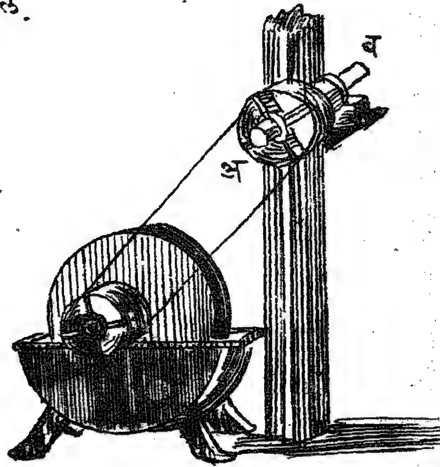
या तिन्ही समीकरणांचा गुणाकार करून—

$$\frac{श}{ट} \times \frac{ट}{ठ} \times \frac{ठ}{व} = \frac{श}{व} = \frac{त \times थ \times द}{क \times ख \times ग} = \frac{\text{सर्व कण्यांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार.}}{\text{सर्व चाकांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार.}}$$

म्हणून जर अनेक चाकांची या प्रमाणें सांगड असेल तर **शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण सर्व कण्यांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार आणि सर्व चाकांच्या त्रिज्यांचा गुणाकार यांमधील प्रमाणा बरोबर असतें.**

(१२८) एका चाकाच्या फिरण्यानें दुसऱ्या चाकास गति देण्याचीं उदाहरणें कला कौशल्याच्या सर्वप्रकारच्या कारखान्यांत असंख्य आढळतात. सुताराचें लांकडें कातण्याचें चाक, तांबट याचें भांडीं वर-

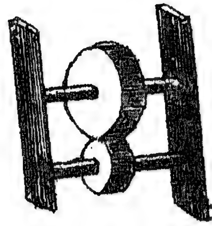
कावर धरण्याचें चाक, लोहाराचें चाकू, सुऱ्या, वस्तरे वगैरे हत्यारांस धार लावण्याचें चाक, लोहाराच्या लोखंडी कांतीव कामकरण्याचा चरक इत्यादि सर्व यंत्रांत एक चाक फिरवून दुसरें चाक फिरविण्याची योजना असते. वाफेच्या यंत्राचें थोरलें चाक वाफेनें फिरवून त्याच्या योगानें पट्टे लावून दुसरीं अनेक चाकें फिरवितात. मोठमोठ्या कारखान्यांत या रीतीनें एका चाकाच्या फिरण्यानें अनेक चाकांस गति द्यावी, यासाठीं कारखान्याच्या इमारतीच्या छताखालीं एक लांबच लांब लोखंडी रूळ आंसा भोंवती फिरता बसविलेला असतो. आणि त्यावरून वाफेच्या यंत्राच्या थोरल्या चाकावरून एक सतत वर्ति चामड्याचा पट्टा जातो. येणेंकरून चाक फिरलें म्हणजे रूळ फिरतो. यारुळावर नियमित अंतरावर अनेक सतत वर्ति पट्टे घातलेले असून चरक व दुसरीं यंत्रें यांच्या चाकांवरून नेलेले असतात. याची कल्पना या आकृतीवरून बरीच येईल.



यांत अब हा छताखालील लांब रुळाचा भाग आहे. या रीतीनें गति देण्यांत हा फायदा असतो कीं पट्टे एकमेकांपासून हव्या तितक्या अंतरावर ठेवितां येतात व पुढें मागें सारतां येतात; आणि थोडासा फेरफार करून उलट सुलट हीं चाकें फिरवितां येतात. मुंबईतील मोठमोठ्या गिरण्यांच्या व दुसऱ्या छोट्या कारखान्यांत ही रचना

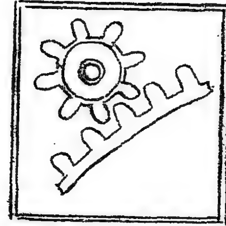
सर्वत्र दृष्टीस पडेल. जेव्हां मध्येंच एकादें दुसरें यंत्र बंद ठेवणें असेल तेव्हां त्यावरच्या मात्र पट्टा पाडतात तेणेंकरून तें बंद होऊन बाकीचीं यंत्रें चालू राहतात.

(१२९) चाकानें चाकास गति देणारीं चाकें— कानड्याचा पट्टा किंवा दोरी न लावितां एका चाकाच्या कण्याच्या परिघानेंच दुसऱ्या चाकाच्या परिघावर कार्य घडून ही चाक फिरूं शकतें. परिघांच्या खरबरीत पृष्ठभागांचीं एकमेकांवर कार्य घडून चाकें परस्पर उलट दिशेनें फिरतात आणि अशा ठिकाणीं त्यांचे वेग त्यांच्या व्यासाच्या उलट प्रमाणांत असतात. एकमेकांस गति न देतां चाकें फिरूं नयेत अशा बद्दल कांहीं तजवीज योजावी लागते. जर परिघाचे पृष्ठभाग अगदीं साफ गुळगुळीत असतील. व त्यांपासून परस्परांचें कांहीं घर्षण घडणार नाहीं तर चाकें एकमेकांस गति देणार नाहींत; या करितां अनेक उपाय योजितात. जेव्हां यंत्राच्या आंगीं फार मोठी शक्ति असण्याची अपेक्षा असेल, तेव्हां परिघावर चामड्याचा पट्टा बसवून किंवा परिघ आडव्या हिराच्या लांकडी तुकड्यांचा करून परिघाचा पृष्ठ भाग खरबरीत करितात. सूत कातण्याच्या यंत्रांत अशी योजना असते. रेड्याच्या कातड्यानें मढविलेला ज्याचा परिघ आहे, असें एक मोठें चाक आडवें ठेवून त्याच भोंवती तसल्याच कातड्यानें मढविलेलें धाकटें रूळ बसविलेले असतात. येणें करून चाक फिरल्या बरोबर सर्व रूळ फिरतात आणि प्रत्येक रूळ चातीस फिरवितो. असें एक चाक फिरवून अनेक चात्या फिरवितां येतात. परंतु जेथें यांत्रिक सामर्थ्य फार लागतें त्या ठिकाणीं या रीतीनें काम होत नाहीं. आणि वस्तुतः ज्यांचे पृष्ठभाग केवळ घर्षणानें गति देतील अशीं चाकें ही सहज करितां येत नाहींत. व तीं घांसून घांसून गु-



ळगुळीत होतात म्हणून चाकांच्या परिघांच्या पृष्ठभागावर दांत्ये पाडतात व येणेंकरून दोहोंमध्यें परस्पर चांगला प्रतिबंध घडून हवी तशी नियमित गति देतां येते.

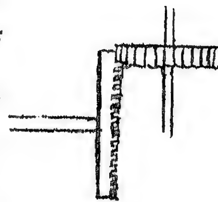
(१३०) दांत्ये असलेलीं चाकें:- चाकांच्या व कण्यांच्या पृष्ठभागामध्यें सतत प्रतिबंध घडावा आणि एकाच्या फिरण्यानें दुसऱ्यास नियमित गति देतां यावी, यासाठीं परिघावर दांत्ये व खांचा पाडतात. सर्व दांत्ये व खांचा समान आकाराच्या असतात, व एका चाकाचे दांत्ये दुसऱ्या चाकाच्या कण्याच्या दात्यांत बरोबर बसतात. यामुळें एक चाक एका दिशेनें फिरलें म्हणजे तें दुसऱ्यास उलट दिशेनें फिरवितें. पहिल्याचा दांत्या दुसऱ्याच्या खांचींत बसतो. म्हणून पहिलें चाक फिरलें म्हणजे खांचींतून दांत्या बाहेर निघण्यास यत्न करितो त्यावेळीं त्यास दुसऱ्या चाकाच्या दांत्याचा प्रतिबंध होतो. यास्तव त्या प्रतिबंधास अतिक्रमण करीत असतां तो दांत्या दुसऱ्यास वर ढकलितो, व तेणेंकरून दुसऱ्यास उलट दिशेनें गति मिळते. याप्रमाणें दुसऱ्याच्या खांचेंतून पहिल्याचा दांत्या बाहेर पडला कीं, दुसऱ्याचा दांत्या पहिल्याच्या खांचेंत शिरतो त्यास बाहेर काढण्यांतही प्रतिबंध होतो, व त्यामुळें दुसऱ्यास गति मिळते. याप्रमाणें दर वेळीं एकेक दांत्या सुटतो. आणि एकाच्या गतीनें दुसऱ्यास गति मिळते. दोहोंवरील दांत्ये व खांचा सारख्या आकाराच्या असतात यामुळें दांत्यांच्या संख्येप्रमाणें त्याचे फेरे होतात. जर फिरत्या चाकाच्या परिघावर १०० दांत्ये असले आणि दुसऱ्याच्या परिघावर २५ असले तर पहिल्याचा एक फेरा झाला म्हणजे दुसऱ्याचे चार होतील. दुसऱ्यावर ३५ दांत्ये असले तर त्याचे $\frac{१००}{३५}$ फेरे होतील. यामुळें नियमित दांत्ये पाडून हवी तशी अगदीं नियमित

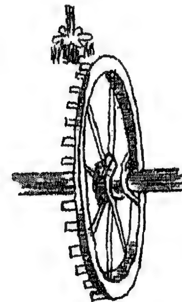


गति देतां येते. यामुळें चाकाच्या सांगडीस गति देण्यास आतां साधारणत: दात्यांच्या चक्रांचाच उपयोग करितात.

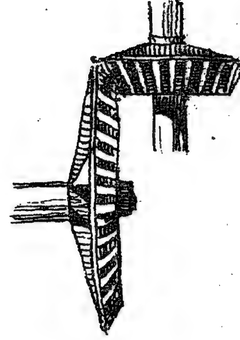
चाकें फिरत असतांव दांत्ये एकमेकांजवळून सरत असतां ते एकमेकांवर घासून झरूं नयेत म्हणून दात्यांस आकार देण्यांत अनेक हिकमती लढवितात. दात्यांस अशा विशेष प्रकारचा आकार देतात कीं, तेणेंकरून रस्त्यावर गाडीचें चाक जसें लोटत जातें त्या प्रमाणें दांत्ये एकमेकांवरून लोटले जातात. नाहीं तर सतत घर्षणानें व दाबानें दांत्ये झिजून जाते व फार दिवस टिकले नसते

दात्यांचीं किंवा दंतुर चाकें मुख्य तीन प्रकारचीं असतात. ज्याचे दांत्ये परिधावर उभे सुळक्या सारखे आणि त्याच्या पातळींत चाकाच्या मध्यापासून त्रिज्या आल्या प्रमाणें वरील आकृतींत दाखविल्यासारखे असतात. तेव्हां त्या चाकांस **कंटक चाकें** असें नांव देऊं. यांस इंग्रजींत **स्परव्हील्स** म्हणतात. या रचनेनें दोन्हीं चाकें एकाच पातळींत फिरतात. जेव्हां कण्याच्या किंवा रुळाच्या पृष्ठ भागावर त्याच्या आंसाशीं समांतर असे दांत्ये पाडिले असतील तेव्हां अशा दंतुर चाकास त्याच्या आकारावरून त्यास **किरीट चाक** असें नांव देऊं. यास इंग्रजींत **क्राउन व्हील** म्हणतात. जर असल्या किरीटचाकाच्या दांत्याचें कार्य कंटक चाकाच्या दांत्यावर खालील आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें होईल तर कंटक चाकाचा आंस किरीट चाकाच्या आंसाशीं लंब असेल व कंटक चाकास किरीट चाकाच्या पातळीशीं लंब अशा पातळींत गति मिळेल. कधीं कधीं दांत्ये पृष्ठभागावर उभेपण तिर्कस म्हणजे चाकाच्या पातळीशीं कांहीं कोन करणारे

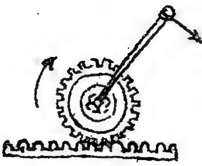




असतात. अशीं चाकें या आकृतींत दाखविलीं आहेत. यांस तिर्यक दांत्यांचीं चाकें असें नांव देऊं. यांस इंग्रजींत **बिव्हेलव्हील** असें नांव आहे.

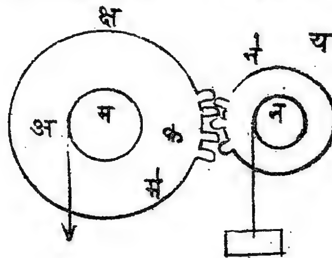


जेव्हां एक सारखी उभी लंबरेषेंत थोडीशी गति आंस फिरवून देणेची असते तेव्हां एका कांबीस दांत्ये पाडून त्यांवर कंटक चक्राच्या दांत्याचें कार्य करितात. कांबीस इंग्रजींत **र्‍याक** म्हणतात. अशी रचना छोट्या यंत्रांत असते व ती खालील आकृतींत दाखविली आहे.



वर सांगितलें त्याप्रमाणेंच अशा सांगडीची यांत्रिकशक्ति काढण्यांत पूर्वी काढलेल्या सारण्यांत परिघांच्या व व्यासांच्याजागीं परिघावरील दात्यांची संख्या घेतली म्हणजे झालें. तथापि यंत्रशास्त्राच्या रीतीनें अशा सांगडीच्या समतोलत्वाची सारणी काढू. यांत एवढें लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं, ज्या ठिकाणीं दांत्ये असतील त्या ठिकाणीं परिघास शक्ति किंवा वजन लाविता येणार नाहीं. शक्ति आणि वजन ज्या ठिकाणीं दांत्ये नाहींत अशा कण्यास किंवा परिघास लावावीं लागतात.

(१३१) दांत्यांच्या चाकांच्या सांगडीच्या समतोलत्वाचा नियम काढणें.



समान आकाराचे दांत्ये ज्यांच्या परिघावर पाडलेले आहेत अशा दोन क्ष आणि य चाकांचे म आणि न हे मध्य आहेत. यांच्या क-

ण्यास दोन्हींनीं शक्ति आणि वजन लाविलीं आहेत. दोऱ्या कप्याच्या परिघांच्या अ आणि ब बिंदूपासून खालीं लोंबतात. व यंत्र स्थिर असतां त्या दिक् रेषेंत असतील; म्हणून म अ आणि न ब हे त्यांवर लंब होतील.

ज्या ठिकाणीं दोहोंचे दांत्ये स्पर्श करितात त्या ठिकाणीं एकाच्या गतीनें व दुसऱ्याच्या प्रतिबंधानें जो परस्पर दाब उत्पन्न होईल तो क कल्पिला, तर जेव्हां दोनही चाकें समतोल असतील तेव्हां या स्थळीं क प्रेरणा दोहों चाकांवर परस्पर उलट दिशांनीं कार्य करील. ही प्रेरणा म'कन' रेषेंत कार्य करीत आहे असें घेऊं आणि त्या रेषेवर म आणि न या मध्यांपासून लंब काढून ते म' आणि न' बिंदूंत त्या रेषेस मिळतात, असें समजूं.

श चाक म भोंवतीं फिरून श आणि क या प्रेरणांनीं समतोल आहे. म्हणून त्यांचीं म भोंवतालचीं भ्रामकत्वें समान असलीं पाहिजेत.

$$\therefore श \times अम = क \times मम'.$$

तसेंच न भोंवती फिरणारें चाक ब आणि क या प्रेरणांनीं समतोल आहे. म्हणून न संबंधीं त्यांचीं भ्रामकत्वें बरोबर असतील.

$$\therefore ब \times बन = क \times नन'.$$

या समीकरणानें वरच्या समीकरणास भागून.

$$\frac{श \times अम}{ब \times बन} = \frac{क \times मम'}{क \times नन'} = \frac{मम'}{नन'};$$

म, न बिंदूस सांधणारी रेषा म'न' रेषेस क ठिकाणीं मिळते, असें समजूं तर मकम' आणि नकन' हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत.

$$\therefore \frac{मम'}{नन'} = \frac{मक}{नक}$$

$$\therefore \frac{श \times अम}{ब \times बन} = \frac{मक}{नक}.$$

जर चाकांच्या त्रिज्यांच्या मानानें दांत्ये फार लहान असतील तर क बिंदूनच बहुतेक दोहोंचे दांत्ये परस्परांस स्पर्श करितील आणि मक व नक याच रेषा बहुतेक दोहों चाकांच्या त्रिज्या होतील आणि मकन रेषा श आणि व यांच्या दिशांशी समांतर होईल.

$$\therefore \frac{\text{म संबंधीं शाचें भ्रामकत्व.}}{\text{न संबंधीं वचें भ्रामकत्व.}} = \frac{\text{शक्तीच्या चाकाची त्रिज्या.}}{\text{वजनाच्या चाकाची त्रिज्या.}}$$

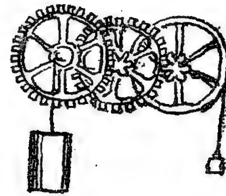
जर दोन्हीं कण्यांच्या त्रिज्या समान असतील. आणि साधारणतः असल्या रचनेंत शक्ति आणि वजन सारख्या त्रिज्यांच्या कण्यास लावितात तर अम = बन,

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{मक}}{\text{नक}} = \frac{\text{शच्या चाकाची त्रिज्या.}}{\text{वच्या चाकाची त्रिज्या.}}$$

ज्या पेक्षां दोहों चाकांचे दांत्ये सारख्या आकाराचे आणि खांचाही सारख्यांच रुंदीच्या असतात म्हणजे दांत्ये सारख्या अंतरावर असतात; यास्तव प्रत्येक चाकावरील दांत्यांची संख्या परिघांच्या प्रमाणांत म्हणून त्रिज्यांच्या प्रमाणांत असेल.

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{शच्या चाकावरील दांत्यांची संख्या.}}{\text{वच्या चाकावरील दांत्यांची संख्या.}}$$

या करितां दंतुर चक्रांच्या रचनेंत **शक्तीस जसें वजन तसें शक्ति लाविलेल्या चाकावरील दांत्याच्या संख्येस वजन लाविलेल्या दांत्यांची संख्या** असें प्रमाण असेल.



अनेक दंतुरचाकांची सांगड असली म्हणजे नेहमी पहिल्या चाकास शक्ति आणि शेवटल्या चाकाच्या कण्यास वजन लावितात; चाक व कणे यांच्या त्रिज्या घेतल्या काय आणि त्यांच्या परिघांवरील दां-

त्यांची संख्या घेतली काय एकच आहे. म्हणून अशा सांगडींत ही, शक्तिस जसें वजन तसें कण्याच्या परिधावरील दात्यांच्या संख्यांच्या गुणाकारास चाकांच्या परिघावरील दात्यांच्या संख्यांचा गुणाकार असें प्रमाण असेल. जर शक्ति लाविलेल्या चाकावर आणि वजन लाविलेल्या कण्यावर दांत्ये नसले व त्यांच्या त्रिज्या दिल्या असल्या तर बाकी चाकावर विवक्षित अंतरानें जितके दांत्ये असतील त्या मानानें दात्यांची संख्या काढावी.

उदाहरणें.

(१) कण्याची त्रिज्या २ इंच असेल तर १० शेरांच्या शक्तीनें १६० शेरांचें वजन तोलून धरण्यास चाकाची त्रिज्या किती असावी?

उ. २ फूट ८ इंच.

(२) कण्याची त्रिज्या ३ फूट आणि चाकाची ९ फूट असेल तर १२ शेरांचें वजन तोलून धरण्यास किति शक्ति लागेल?

उ. ४ शेर.

(३) संयुक्त कण्याच्या त्रिज्या अनुक्रमें ४ व ३ इंच आहेत आणि चाकाची त्रिज्या ३० इंच आहे तर ७२० शेरांचें वजन असल्यास शक्ति किती पाहिजे?

उ. १२ शेर.

(४) दगड उचलण्याच्या यंत्राचा कणा फिरविण्याचा दांडा २ फूट लांब आहे. कण्याची त्रिज्या २ $\frac{1}{2}$ इंच आहे; याचा दांडा फिरविण्यास ८० शेरांची शक्ति लाविल्यास किती शेरांचें वजन उचललें जाईल?

उ. ७६.८ शेर.

(५) तारवाच्या नांगराचा दोर गुंडाळण्याचा उभा रूळ २ फूट त्रिज्येचा आहे. या रुळास फिरविण्याच्या ५ फूट लांबीच्या ६ खुं-

ल्या असून प्रत्येकीस एकेक मनुष्य ७६ शेर जोरानें फिरवीत आहे. तर ते ६ मनुष्य केवढें वजन तोलून धरू शकतील?

उ. ८४० शेर.

(६) वरच्या उदाहरणांत रूळावर अति कमी दाब पडण्यास शक्ति कशी लाविली पाहिजे.

उ. वजनाचें कार्य ज्या दिशेनें होत असेल त्या दिशेशीं काटकोन करणाऱ्या दिशेंत.

(७) नांगराची सांखळी गुंडाळण्याच्या खांबाची त्रिज्या १ फूट २ इंच आहे व ८ फूट लांबीच्या चार खुंट्यास चार मनुष्यें फिरवीत असून नांगर उचलीत आहेत. प्रत्येक मनुष्याचा जोर ११२ पौंडाचा आहे. तर नांगराचें वजन किती असेल तें काढ?

उ. $१\frac{१३}{१७}$ टन.

(८) चाकाची त्रिज्या कण्याच्या त्रिज्येच्या तिप्पट आहे आणि चाकावरील दोरी १८ शेरांचा ताण सोसण्या जोगी मात्र आहे, तर यानें अत्यंत मोठें असें केवढें वजन उचललें जाईल?

उ. ५४ शेर.

(९) संयुक्त चाक व कणा या यंत्रांत कणा फिरविण्याचा दांडा २० इंच लांबीचा आहे. कण्याच्या जाड भागाची त्रिज्या ३ इंच आणि बारीक भागाची २ इंच आहे. तर १ शेर जोरानें दांडा फिरविल्यास किती शेरांचें वजन उचललें जाईल?

उ. ४० शेर.

(१०) चार चाकें व कणे यांची सांगड आहे. चारी सारखीं असून प्रत्येक चाकाची त्रिज्या कण्याच्या पांचपट आहे. या सांगडीनें १८७५ पौंडांचें वजन तोलून धरण्यास किति शक्ति लाविली पाहिजे?

उ. ३ पौंड.

(११) चाकें व कणे यांच्या सांगडींत चाकांच्या त्रिज्या अनुक्र-
में २०, २६, आणि ४८ इंच आहेत आणि कण्यांच्या त्रिज्या ४, ५ आ-
णि ८ इंच आहेत जर पहिल्या चाकाच्या परिघावर १ मणाची शक्ति-
लाविली तर शेवटल्या चाकाच्या कण्यावर किती मणाचें ओझें तोललें
जाईल?

उ. १५६ मण.

(१२) दांत्ये असलेल्या तीन चाकांची सांगड आहे. प्रत्येक चाका-
च्या परिघांत १४४ दांत्ये आहेत आणि प्रत्येक कण्यावर ६ आहेत.
तर २ मणाच्या शक्तीनें केवढें वजन तोलतां येईल?

उ. १३८२ खंडी ८ मण.

(१३) १० शेरांच्या शक्तीनें ३०० शेरांचें वजन तोललें आहे.
चाकाचा व्यास १० फूट आहे तर कण्याची त्रिज्या किती असावी? चा-
कावरील दोरीची जाडी १ इंच आहे, आणि कण्यावरील दोरीची जा-
डी २ इंच आहे.

उ. २ १/३० इंच.

(१४) १४ शेरांचें वजन कण्यावर कांहीं शक्तीनें तोलून धरलें
आहे. चाकाची त्रिज्या २८ इंच, आणि कण्याची त्रिज्या १६ इंच आहे.
जर या त्रिज्या चार चार इंच कमी केल्या तर त्याच शक्तीनें किती शेरां-
चें वजन तोललें जाईल?

उ. १६ शेर.

(१५) चाक व कणा यांच्या त्रिज्या ८ : ३ या प्रमाणांत आहेत.
आणि ६ शेर व १५ शेरांचीं वजनें चाक व कणा यांच्या परिघांवर ला-
वलेलीं आहेत. तर कोणतें वजन खालीं जाईल तें सांग? जें वजन खालीं
जाईल त्या खालीं टेंकावा दिला तर त्यावर आणि चाक व कणा यां-
च्या टेंकूंवर किती किती दाब पडेल?

उ. ६ शेरांचें वजन. टेकाव्यावर दाब ३/८ शेर. टेंकूंवर दाब २० ५/८

(१६) चाक व कणा यांच्या व्यासांमधील अंतर २½ फूट आहे आणि शक्तीच्या ६ पट वजन आहे, तर चाक व कणा यांच्या त्रिज्या काढ?

उ. १८ इंच व ३ इंच.

(१७) चाकाची त्रिज्या कण्याच्या त्रिजेच्या तिप्पट आहे. आणि चाकावरील दोरी ५६ शेरांचें वजन तोलण्यापुरती मात्र बळकट आहे; तर या यंत्रानें अतिशय मोठें केवढें वजन उचलितां येईल?

उ. १०८ शेर.

प्रकरण १०

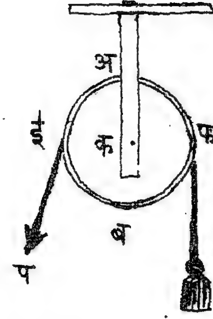
कप्पी.

(१३२) कप्पीचा मुख्य उपयोग एका दिशेपासून दुसऱ्या दिशेस प्रेरणा लागू करण्याचा असतो. ही गोष्ट मुख्यत्वें दुसऱ्या दोरीनें होते. उदाहरणार्थ— जर दोरीच्या एका टोंकास एक वजन बांधून दुसरें टोंक एका तुळीवरून किंवा गजावरून नेऊन तेथें प्रेरणा लागू केली तरी इष्टकार्य सिद्धीस जाईल. परंतु ज्या आधारावरून दोरी जाते तें फिरतें व गुळगुळीत नसल्यानें पुष्कळ घर्षण होऊन दोरी लवकर झिजते. ही अडचण दूर करण्यासाठीं कप्पीचा उपयोग करितात.

(१३३) कप्पी हा एक वाटोळा लांकडाचा किंवा धातूचा चपटा तुकडा असून त्याच्या किनाऱ्यावर दोरी राहण्याजोगी खोल आणि रुंद अशी खांच पाडलेली असते. या वाटोळ्या तुकड्याच्या मध्यबिंदूंत भोंक पाडून त्यांत एक बारीक पण बळकट असा आंस बसविलेला असतो. या आंसा भोंवती गोल तुकडा म्हणजे कप्पी गरगरा फिरते. यामुळें कप्पी फिरल्यानें दोरी सरकते म्हणून दोरीचें घर्षण फार थोडें होतें कप्पीचा आंस एका लांकडी चौकटींत बसविलेला असून त्या चौकटीच्या वरच्या आंगास व खालच्या आंगास असे आकडे असतात. वाटोळा तुकडा व त्याचें घर (चौकट) या दोहोंस मिळून कप्पी हें नांव आहे; परंतु वास्तविक या दोहोंपासून यांत्रिक स्वार्थ होत नाहीं परंतु दोरीपासून होतो; आणि केवळ घर्षण नाहींसें करण्यास मात्र कप्पीचा उपयोग होतो.

(१३४) कप्प्या दोन प्रकारच्या असतात, (१) अचल आणि (२) चल. अचल कप्प्या आपल्या स्थानापासून हालतना-

हींत. चलकप्प्या वजनाबरोबर वर खालीं जातात.



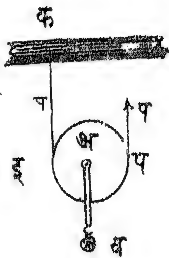
अचलकप्पी. या आकृतींत एक अचल कप्पी दाखविली आहे. अ. ब ही कप्पी लांकडी चौकटींत स्थिर बसविलेली असून ती क आंसावर फिरणारी कप्पी आहे. पइफब ही दोरी कप्पीच्या खांचेंतून जात आहे.

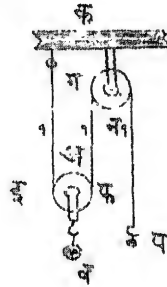
दोरीच्या एका टोंकास व वजन लाविलें आहे. दुसऱ्या शेवटास प प्रेरणा हातानें लाविली आहे. कप्पीचा आंस अगदीं साफ गुळगुळीत असा कल्पिला आहे. यामुळें प्रत्यक्ष प्रमाण ५, प्रमाणें पइफव या दोरीचा ताण सर्व भागीं समान असेल. म्हणून व वजन विवक्षित अवकाशांतून वर उचलण्यास तेवढ्याच जोराची प प्रेरणा तितक्या अवकाशांतून खालीं न्यावी लागेल; दोन्ही समतोल राहण्यास प प्रेरणा आणि व वजन सारखीं असलीं पाहिजेत. कारण ही कप्पी पहिल्या प्रकारच्या उच्चालकासारखी आहे. यास्तव असल्या कप्पींत प = व असेल. म्हणून अचलकप्पीपासून कांहीं यांत्रिकस्वार्थ होत नाहीं; परंतु अचलकप्पीच्या योगानें प्रेरणेच्या योजनेची दिशा फिरवितां येते आणि आपलें स्थान न बदलतां कांहीं वजन पाहिजे तितक्या उंचीवर चढवितां येतें. अशा कप्पीच्या अभावीं वजन उंच चढविण्यास मनुष्यास त्या बरोबर चढावें लागेल.

(१३५) एकाच चलकप्पीच्या यंत्रांत दोऱ्या परस्पर समांतर असल्या तर प्रेरणेच्या दुप्पट वजन तोललें जातें.

अ या चलकप्पीखालून दोरी नेऊन तिचें एक टोंक क या स्थिरबिंदुस्थळीं अडकविलें आहे आणि दुसऱ्या टोंकास प प्रेरणा लाविली असून त्या प्रेरणेनें कप्पी वर लंबाकार उचलली जाते.

किंवा दुसरें टोंक एका न या अचलकप्पीवरून आणून आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें प प्रेरणा लावितात.





जर प प्रेरणेनें व वजन समतोल राहिलें असेल, तर तें दोहों दोऱ्यांनीं वर उचललें आहे. समजा कीं, ई,फ स्थळीं दोरी अ कप्पीस स्पर्श करिते, आणि दुसऱ्या आकृतींत ग स्थळीं न कप्पीस स्पर्श करिते. तर व वजन कई आणि पफ किंवा गफ या दोऱ्यांनीं उचलून धरिलें आहे. $त_1$ आणि $त_2$ हे या दोऱ्यांचे अनुक्रमें ताण कल्पिले तरः—

$$त_1 + त_2 = व$$

परंतु प्रत्यक्ष प्रमाण ५ प्रमाणें कइफप किंवा कइफगप या दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा आहे म्हणून

$$प = त_1,\ किंवा\ प = त_2 = त_1$$

$$\therefore व = २प.$$

दोन्ही दोऱ्या केवळ व वजनासच तोलून धरितात. असें नसून अ कप्पीस तिच्या चौकटीसह तोलून धरितात. साधारणतः जेथें मुद्दाम सांगितलें नसेल, त्या ठिकाणीं कप्प्यांचें वजन शून्य आहे असें कल्पावयाचें. परंतु बहुतेक सारण्या कप्प्यांचें वजन हिशेबांत धरून काढूं. चलकप्पीचें वजन $व_1$ कल्पिलें, तर सारणी अशी होईल.

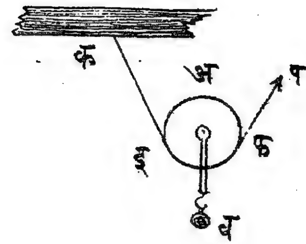
$$व + व_1 = २प \quad जर \quad व_1 = ०$$

$$व = २प \quad किंवा \quad प = \frac{१}{२} व$$

(१३६) चलकप्पीस उचलणाऱ्या दोऱ्या परस्पर समांतर नस-

तील तर प्रेरणा आणि वजन यांमधील प्रमाण काढणें.

अ या कप्पीच्या भोंवती जाणाऱ्या दोरीचा एक शेवट क बिंदुस्थळीं टांगिला आहे आणि दुसरा शेवट प या प्रेरणेनें वर ओढिला जातो. व वजन कप्पीच्या चौकटीस टांगिलें आहे. कइ, फप दोऱ्या परस्पर समांतर नसून त्यांच्या मधील कोन क्ष आहे.



व वजन कइ, फप या दोहों दोऱ्यांनीं तोलून धरिलें आहे. कइफप या दोरीचा ताण सर्वत्र सारखा आहे. म्हणून कइ, फप या दोहोंचा ताण समान व तो प प्रेरणे बरोबर आहे. यावरून असें झालें कीं, कप्पीवर कइ, फप या समान प्रेरणांचें कार्य घडत असून त्यास व या प्रेरणेनें समतोल धरिलें आहे; म्हणून व प्रेरणा कइ, फप या प्रेरणांच्या परिणामी प्रेरणेबरोबर पण उलट दिशेनें कार्यकरणारी प्रेरणा आहे.

∴ (क. २२ प्रमाणें) व=२प × को·भु· $\frac{क्ष}{२}$

दोहों दोऱ्यांनीं व वजनाबरोबर अ कप्पीचें व, वजन ही तोलून धरिलें आहे. म्हणून.

$$व + व_{१} = २प \times को·भु \frac{क्ष}{२}.$$

(१३७) अनेक चल व अचल कप्प्यांची योजना करून प्रेरणेच्या हवें तितकें पट वजन उचलण्याजोगी रचना करितां येते. याचे मुख्य तीन प्रकार आहेत.

(१) पहिल्या प्रकारच्या रचनेंत प्रत्येक चलकप्पीस वेगळी दोरी असून तिचें एक शेवट स्थिर अशा तुळीस टांगिलेलें असून दुस-

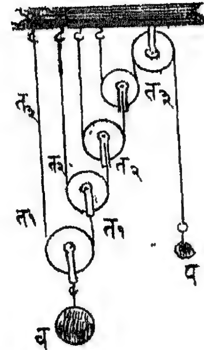
रें शेवट तिच्या वरच्या दुसऱ्या कप्पीस अडकविलेलें असतें.

(२) दुसऱ्या रचनेंत एकाच चौकटींत अनेक कप्प्या बसविलेल्या आहेत अशा दोन चौकटी असून एक अचल व दुसरी चल असते; चलचौकटीस वजन टांगिलेलें असतें. सर्व कप्यांवरून एकच दोरी जाते.

(३) तिसऱ्या प्रकारच्या रचनेंत प्रत्येक दोरी वजनास अडकविलेली असते.

आतां प्रत्येक प्रकारच्या रचनेंत वजन आणि प्रेरणा यांमध्यें संबंध कसा असतो तें पाहूं.

(१३८) पहिल्या प्रकारच्या रचनेंत प्रत्येक कप्पीस लाविलेल्या दोऱ्या परस्पर समांतर असतात. तेव्हां जर न चलकप्प्या असतील तर त्याच्यासमतोलत्वाचा नियम काढणें.



$अ_१$ $अ_२$ $अ_३$ ... $अ_न$ चल कप्प्या आहेत. $व_१$ $व_२$ $व_३$ ... $व_न$ हीं त्यांचीं वजनें आहेत. त्यांस लाविलेल्या दोऱ्यांचे ताण अनुक्रमें $त_१, त_२, त_३, त_४,$ ... $त_न$ आहेत. अगदीं खालच्या $अ_१$ कप्पीस व वजन टांगिलें आहे. तें वजन व $अ_१$ कप्पीचें वजन तीस लाविलेल्या दोरीनें तोलून धरिलें आहे. त्या दोरीचा ताण $त_१$ आहे म्हणून (कलम १३५ प्रमाणें)

$$त_१ = \frac{१}{२}(व + व_१) = \frac{१}{२} व + \frac{१}{२} व_१ \cdots (१)$$

$अ_२$ कप्पीच्या दोरीनें $अ_१$ कप्पीच्या दोरीचा ताण $त_१$ आणि $अ_२$ कप्पीचें वजन $व_२$ यांस तोलून धरिलें आहे म्हणून.

$$त_२ = \frac{१}{२}(त_१ + व_२)$$
$$= \frac{१}{२}\left(\frac{१}{२} व + \frac{१}{२} व_१ + व_२\right)$$
$$= \frac{१}{२^२} व + \frac{१}{२^२} व_१ + \frac{१}{२} व_२$$

तसेंच $त_३ = \frac{१}{२}(त_२ + व_३)$

$$= \frac{१}{२}\left(\frac{१}{२^२} व + \frac{१}{२^२} व_१ + \frac{१}{२} व_२ + व_३\right).$$

$$= \frac{१}{२^३} व + \frac{१}{२^३} व_१ + \frac{१}{२^२} व_२ + \frac{१}{२} व_३.$$

$$त_४ = \frac{१}{२}(त_३ + व_४).$$

$$= \frac{१}{२^४} व + \frac{१}{२^४} व_१ + \frac{१}{२^३} व_२ + \frac{१}{२^२} व_३ + \frac{१}{२} व_४.$$

या प्रमाणें नव्या कप्पीच्या दोरीचा ताण $त_न$ असेल व त्याची किंमत अशी होईल.

$$त_न = \frac{१}{२}(त_{न-१} + व_न)$$

$$= \frac{१}{२^न} व + \frac{१}{२^न} व_१ + \frac{१}{२^{न-१}} व_२ + \frac{१}{२^{न-२}} व_३ \cdots + \frac{१}{२} व_न.$$

शेवटल्या म्हणजे न व्या कप्पीच्या दोरीचा ताण प्रेरणा जी लाविली असेल त्या बरोबर असेल. म्हणून.

$$प = त_न$$

$$\therefore प = \frac{१}{२^न} व + \frac{१}{२^न} व_१ + \frac{१}{२^{न-१}} व_२ + \frac{१}{२^{न-२}} व_३ \cdots + \frac{१}{२} व_न$$

या समीकरणास $२^न$ यानें गुणून.

$$२^न प = व + व_१ + २व_२ + २^२ व_३ + २^३ व_४ \cdots\cdots २^{न-१} व_न \cdots (१)$$

ही साधारण सारणी झाली.

आतां जर कप्प्यांचीं वजनें धरिलीं नाहींत म्हणजे $व_१ = व_२ = व_३ \cdots = ०$ असें कल्पिलें तर.

$$२^न प = व \text{ - - - - - - - - - - - } (२)$$

आणि सर्व कप्प्यांचीं वजनें सारखीं असलीं म्हणजे $व_१ = व_२ = व_३ \cdots = व_न$ तर–

$$२^न प = व + व_१(१ + २ + २^२ + २^३ \cdots २^{न-१}).$$

$$= व + व_१(२^न - १) \cdots\cdots\cdots\cdots (३).$$

$$प = \frac{व}{२^न} + व_१ - \frac{व_१}{२^न}\ ;\ प - व_१ = \frac{व - व_१}{२^न}$$

ज्या ठिकाणीं कप्प्यांच्या दोऱ्यांचे शेवट तुळीस बांधिले आहेत. ती स्थळें $ब_१, ब_२, ब_३, ब_४$ इत्यादि असरली तर त्या स्थळीं दाब खालीं लि-

हिच्या प्रमाणें असेल. कप्प्यांचीं वजनें हिशेबांत धरिलीं नाहींत.

$$व_1 = त_1 = \frac{1}{2} व.$$
$$व_2 = त_2 = \frac{1}{2^2} व.$$
$$व_3 = त_3 = \frac{1}{2^3} व.$$
$$व_न = त_न = \frac{1}{2^न} व.$$

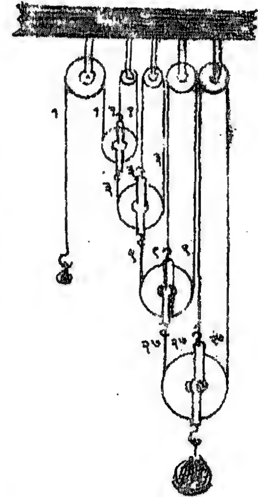
∴ तुळीवरील एकंदर दाब $= त_1 + त_2 + त_3 \cdots \cdots$

$$= व\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^न}\right) = व\left(1 - \frac{1}{2^न}\right).$$

∴ हा दाब आणि शक्ति म्हणजे लाविलेली प्रेरणा यांच्या बेरजेबरोबर वजन असतें.

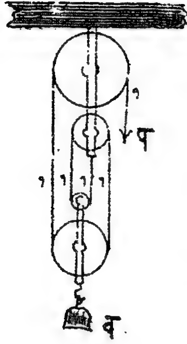
या रचनेंत कधीं कधीं प्रत्येक कप्पीवरील दोरी तुळीस न बांधितां तुळीस टांगिलेल्या एका स्थिरकप्पीवरून खालीं आणून त्याच कप्पीच्या चौकटीच्या वरच्या भागीं अडकविलेली असते. म्हणून प्रत्येक दोरीचे तीन भाग होऊन ते तीन भाग कप्पीस उचलून धरितात. म्हणून वरील सारणींत २ च्या ठिकाणीं ३ याचा उपयोग केला पाहिजे म्हणजे.

$$3^न प = व.$$



(१३९) दुसऱ्या रचनेंत दोन चौकटी असून एकच दोरी सर्व कप्प्यांवरून जात असेल, आणि दोरीचे वेगवेगळे भाग परस्पर समांतर असतील, तेव्हां प्रेरणा व वजन यां मधील संबंध काढणें.

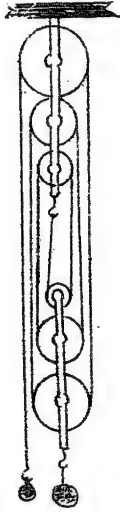
वरची चौकट अचल असते. आणि खालची चौकट चल असते व तिला वजन टांगिलेलें असतें. तें वजन व कप्प्यांचें वजन खालच्या चौकटीस जेवढे दोरीचे भाग असतील तेवढ्या ताण्यानीं तोलून धरिलें आहे. दोरीच्या एका शेवटास प प्रेरणा लाविली आहे.



दोरी सलग असल्यानें तिच्या सर्व भागीं ताण सारखा असेल व प्रत्येक दोरीच्या भागाचा ताण प मेरणे बरोबर असेल. आतां जर खालची चौकट एकंदर चार दोऱ्यांनीं तोलून धरिली असेल, आणि कप्प्यांसह खालच्या चौकटीचें वजन $व_{१}$ असेल तर.

$$व + व_{१} = ४प$$

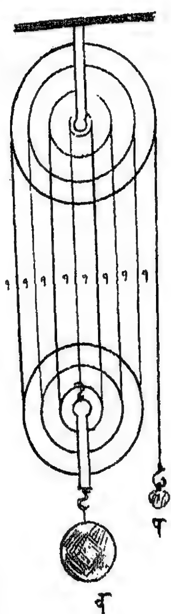
दुसऱ्या आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें जर सहा दोऱ्या असतील तर.



$$व + व_{१} = ६प$$

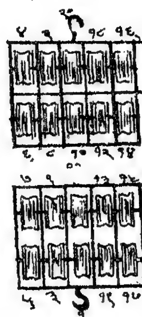
प्रत्येक चौकटींत अनेक कप्प्या बसविण्याच्याबद्दल एकाच तुकड्यास कप्पीसारख्या अनेक खांचा पाडून तो तुकडा चौकटींत बसवितात. कधीं कधीं सारख्या जाडीचा तुकडा घेऊन सारख्या आकाराच्या खांचा पाडतात. कधीं कधीं शंक्वाकार तुकडा घेऊन कमी कमी परिघाच्या अशा खांचा पाडतात. म्हणजे सारख्या आकाराच्या किंवा कमी कमी व्यासाच्या अशा कप्प्या एकाजवळ एक अशा समांतर एकमेकांस लावून ठेविल्या प्रमाणें रचना दिसते. पहिल्या प्रकारची रचना आकृतींत दाखविली आहे या रचनेंत दोऱ्यांचे भाग साधारण रचनेंतल्या इतकेच असतात परंतु कप्पी साधी व आटपशीर असते. दुसऱ्या प्रकारची रचना पुढील आकृतींत दाखविली आहे या रचनेस **व्हाइट**ची कप्पी म्हणतात. दोरीचा एक भाग वजन उचलण्यास जास्त लागून तितका जास्त फायदा होतो. यांत वजन उचलणाऱ्या दोऱ्यां-





चे भाग विषम असतात.

स्मीटन या इंजिनियरानें शोधून काढलेली रचना याच वर्गांत येते. ही रचना सर्वांत बळकट म्हणजे अधिक फायदेंकारक आहे. तिच्या दोन चौकटी या आकृतींत दाखविल्या आहेत. वरच्या चौकटींत १० आंकडा आहे त्या ठिकाणीं दोरीचें शेवट अडकविलें असून १, २, ३ इत्यादि आंकडे मांडले आहेत. त्या खांचीवरून दोरी जाते २० व्या खांचेवरून गेल्यावर दोरीच्या दुसऱ्या शेवटास मेरणा लाविलेली असते. या रचनेंत खालच्या चौकटीस अडकविलेल्या वजनास तोलून धरणारे दोरीचे भाग २० असतात. आणि प्रत्येक भागाचें सामर्थ्य मेरणे एवढें असतें म्हणून मेरणेच्या २० पट वजन उचललें जातें. ज्या तुळीस वरची चौकट टांगलेली असते तिच्यावर मेरणेच्या २१ पट दाब पडतो.



जर दोऱ्यांनीं वजनासह खालची चौकट तोलून धरिली असेल तर.

$$व + व_1 = नप. \therefore प = \frac{1}{न}(व + व_1)$$

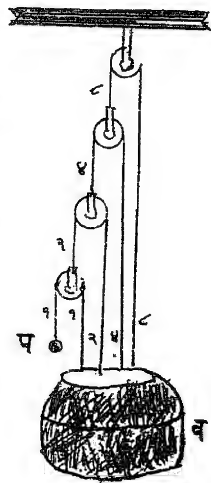
$$व_1 = ०;\ तर\ व = नप;\ प = \frac{व}{न}.$$

जेव्हां दोरीचा दुसरा शेवट वरच्या चौकटींतील कप्पीस अडकविला असेल, तेव्हां दोऱ्यांची संख्या सम असते व खालच्या चौकटीस अडकविला असेल तेव्हां ती संख्या विषम असते. वरची चौकट तुळीस टांगिली आहे त्या ठिकाणीं वजनास लाविलेल्या सर्व दोऱ्यांचे भाग आणि मेरणा

ज्या भागास लाविली आहे तो भाग या सर्वांचा दाब पडतो. म्हणून येथें व+प दाब पडतो.

(१४०) तिसऱ्या रचनेंत प्रत्येक कप्पीवरील दोरीचें एक शेवट वजनास अडकविलेलें असतें, व दुसरें त्या खालील कप्पीस अडकविलेलें असतें. अगदीं खालच्या कप्पीवरील दोरीचें एक शेवट वजनास अडकविलेलें असून दुसऱ्या शेवटास प्रेरणा लाविलेली असते. अगदीं वरची कप्पी अचल असून बाकी सर्व चल असतात. अशा रचनेंत प्रेरणा व वजन यांमधील संबंध काढणें आहे.

ज्यास सर्व कप्प्यांच्या दोऱ्या लाविल्या आहेत तें वजन **व** आहे. अगदीं खालच्या कप्पीवरील दोरीच्या शेवटास प प्रेरणा लाविली आहे.



$व_1, व_2, व_3, व_4$ हीं खालच्या कप्पीपासून कप्प्यांचीं अनुक्रमें वजनें आहेत.

यांजवरील दोऱ्यांचे ताण अनुक्रमें $त_1, त_2, त_3$ ...... इत्यादि आहेत. एकंदर न कप्प्या आहेत, व त्यांपैकीं न−१ चल आहेत.

व वजन सर्व दोऱ्यांनी तोलून धरिलें आहे.

$\therefore व = त_1 + त_2 + त_3 \cdots\cdots त_न$.

आतां $त_1, त_2, त_3$ ...... यांचा संबंध प्रेरणेशीं कसा आहे तें पाहूं. याकरितां प्रत्येकाची किंमत काढिली पाहिजे.

हा खालच्या कप्पीवरील दोरी प प्रेरणेच्या सामर्थ्यानें ताणली आहे म्हणून तिचा ताण $त_1 = प$ आहे. त्यावरील कप्पीच्या दोरीच्या एका शेवटास त्या खालची कप्पी अडकविली आहे म्हणून तिनें खालच्या कप्पीस तोलून धरिलें आहे. $\therefore त_2 = 2त_1 + व_1 = 2प + व_1$. तिसऱ्या कप्पीवरच्या दोरीस दुसरी कप्पी टांगिलेली आहे. म्हणून

$$त_३ = २त_२ + व_२ = २^२प + २व_१ + व_२.$$

चवथ्या कप्पीवरील दोरीचा ताण असा असेल

$$त_४ = २त_३ + व_३ = २^३प + २^२व_१ + २व_२ + व_३.$$

याप्रमाणेंच न कप्प्या असल्यास न्या कप्पीवरील दोरीचा ताण असा होईल.

$$त_न = २त_{न-१} + व_{न-१} = २^{न-१}प + २^{न-२}व_१ + २^{न-३}व_२ + २^{न-४}व_३ \cdots + व_{न-१}$$

म्हणून.

$$त_१ = १प.$$

$$त_२ = २प + व$$

$$त_३ = २^२प + २व_१ + व_२$$

$$त_४ = २^३प + २^२व_१ + २व_२ + व_३$$

$$त_न = २^{न-१}प + २^{न-२}व_१ + २^{न-३}व_२ + २^{न-४}व_३ \cdots + व_{न-१}.$$

यांची बेरीज घेऊन.

$$त_१ + त_२ + त_३ + त_४ \cdots + त_न = प(१ + २ + २^२ + २^३ \cdots २^{न-१}) + व_१(१ + २ + २^२ \cdots २^{न-२}) + व_२(१ + २ + २^२ \cdots २^{न-३}) \cdots \cdots + व_{न-१}.$$

परंतु $त_१ + त_२ + त_३ \cdots + त_न = व.$

$$१ + २ + २^२ + २^३ \cdots २^{न-१} = २^न - १$$

$$१ + २ + २^२ + २^३ \cdots २^{न-२} = २^{न-१} - १$$

$$१ + २ + २^२ \cdots + २^{न-३} = २^{न-२} - १$$

$$\therefore व = प(२^न - १) + व_१(२^{न-१} - १) + व_२(२^{न-२} - १) \cdots + व_{न-१} \cdots (१)$$

(अ) जर कप्प्यांचें वजन हिशेबांत धरिलें नाहीं, म्हणजे जर.

$$व_१ = व_२ = व_३ \cdots \cdots = ०$$

तर.

$$व = प(२^न - १) \cdots \cdots \cdots (२)$$

(२) जर सर्व कप्प्यांचें वजन समान असेल, म्हणजे जर—

$व_1 = व_2 = व_3$ ... ...

तर-

$$व = प(२^{न} - १) + व_1(२^{न-१} + २^{न-२} + २^{न-३} \ldots\ldots + २) - व_1(न-१)$$

$$व = प(२^{न} - १) + व_1(२ + २^{२} \ldots\ldots २^{न-१}) - व_1(न-१)$$

$$= प(२^{न} - १) + व_1(२^{न} - २ - व_1(न-१)$$

$$= प(२^{न} - १) + व_1(२^{न} - २ - न + १)$$

$$= प(२^{न} - १) + व_1(२^{न} - न - १) \ldots \ldots \ldots (३)$$

या रचनेंत ज्या ठिकाणीं अचलकप्पी टांगिली असेल त्या ठिकाणीं दाब $व + प + व_1 + व_2 + व_3 \ldots \ldots व_न$ असेल.

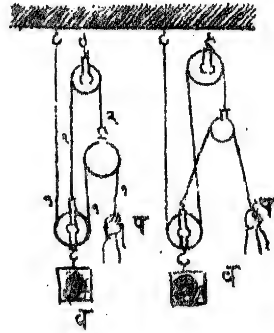
(१४१) प्रत्येक कप्पीवरील दोरीचा शेवट वजनास न अडकवितां खालील आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें दुसऱ्या एका कप्पीवरून नेऊन पहिल्या कप्पीच्या खालच्या आंकड्यास लाविलेला असतो. या प्रमाणें प्रत्येक कप्पीवरील दोरी दुसऱ्या एका कप्पीवरून नेऊन तिच्या खालच्या आंकड्यास अडकविलेली असते. आणि खालच्या कप्प्यांच्या आंकड्यास वजन टांगलेलें असतें. यांत वजन एक दोरीच्या जागीं दोन दोन दोऱ्या लागतात. यास्तव वरच्या सारणींतील २च्या ठिकाणीं ३ लिहिले म्हणजे त्याच सारण्या या रचनेंतील प्रेरणा व वजन यांमधील संबंध दाखवितील.

$$व = प(३^{न} - १) + व_1(३^{न-१} - १) + व_2(३^{न-२} - १) + व_{न-१} \ldots (१)$$

$$व = प(३^{न} - १) \ldots \ldots \ldots \ldots (२)$$

$$व = प(३^{न} - १) + व_1(३^{न} - न - १) \ldots \ldots \ldots (३)$$

(१४२) आणखी दोन प्रकारच्या कप्प्यांच्या रचना असतात. त्या खालील दोन आकृतींत दाखविल्या आहेत. यांस स्प्यानिश-



बर्टन म्हणतात. प्रत्येकींत दोन दोऱ्या व दोन चलकप्या आहेत.

पहिल्या रचनेंत दोनचलकप्यांवरून गेलेल्या दोरीचे दोन भाग वजन तोलण्यास लागलेले आहेत, व या प्रत्येक भागाचा ताण प्रेरणे इतका आहे. अचलकप्पीवरील दोरीचा एक शेवट खालच्या चलकप्पीस म्हणजे वजनास अडकविला आहे, व दुसऱ्या शेवटानें दुसरी चलकप्पी उचलून धरिली आहे. म्हणून इच्या प्रत्येक भागाचा ताण प्रेरणेच्या दुप्पट आहे. यास्तव दुप्पट ताणाच्या दोरीचा एक भाग आणि एकपट ताणाच्या दोरीचे दोन भाग वजनास तोलून धरितात. म्हणून कप्यांचें वजन हिशेबांत धरिलें नाहीं तर—
$व = ४प$ आणि ज्या ठिकाणीं दोरीचा शेवट तुळीस टांगिला आहे त्या ठिकाणी दाब प आणि ज्या ठिकाणीं अचलकप्पी टांगिली आहे त्या ठिकाणी दाब ४प असेल.

आतां चलकप्यांचीं वजनें हिशेबांत धरूं. खालच्या चलकप्पीचें वजन $व_1$ आणि वरच्या चलकप्पीचें वजन $व_2$ आहेत. व वजन आणि खालच्या चलकप्पीचें $व_1$ वजन खालच्या कप्पीस लाविलेल्या तीन दोऱ्यांनीं तोलून धरिलें आहे. चलकप्यांवरील दोरीच्या भागांचे ताण प बरोबर आहेत. अचलकप्पीवरील दोरीच्या एक शेवटानें वरच्या चलकप्पीस उचलून धरिलें आहे. म्हणून त्या दोरीच्या प्रत्येक भागाचाताण $२प + व_2$ झाला. असला एक भाग वजनास लागला आहे म्हणून—

$$व + व_1 = २प + २प + व_2 = ४प + व_2.$$

दोरी तुळीस टांगिल्या ठिकाणीं दाब प च असेल. परंतु अ-

चलकप्पी टांगिल्या ठिकाणीं दाब ४प + २$व_{२}$ असेल.

दुसऱ्या रचनेंत वरच्या चलकप्पी वरील दोरीच्या एका शेवटास प्रेरणा लाविली आहे व दुसरें शेवट खालच्या चलकप्पीस अडकविलें आहे. परंतु हें वांकडें असल्यामुळें दोरीच्या या भागानें प प्रेरणे एवढ्या जोरानें वजन उचललें जाणार नाहीं. या प्रेरणेचा लंबदिशेंत जो पृथग्भूत भाग येईल, तेवढ्या जोरानें मात्र उचललें जाईल. या दोरीच्या दोहोंभागांमधील कोन २थ असला तर हा पृथग्भूत भाग प को भु थ होईल. दुसऱ्या दोरीचें एक शेवट दुसऱ्या चलकप्पीस उचलून धरितें म्हणून त्याचा ताण २प को भु थ होईल (क० २१ पहा.) ही दोरी अचलकप्पीवरून खालच्या चलकप्पी खालून गेली आहे म्हणून हिचे दोन भाग वजनास उचलित आहेत, व प्रत्येक भागाचा जोर २प को भु थ. आहे, म्हणून कप्प्यांचीं वजनें हिशबांत घेतलीं नाहींतर व=२प को भु थ + २प को भु थ + प को भु अ = ५प को भु थ. असेल आणि दोरी टांगिली आहे त्या ठिकाणीं तुळीवर दाब २ प को भु थ. व अचलकप्पी टांगिली आहे त्या ठिकाणीं ४ प को भु थ असेल. कप्प्यांचीं वजनें $व_{१}$ आणि $व_{२}$ असलीं, तर

$$व + व_{१} = ५ प को भु थ + २ व_{२}$$

असेल; दोरी टांगिल्या ठिकाणीं दाब २ पभु को भु थ + $व_{२}$ आणि अचलकप्पी टांगिल्या ठिकाणीं दाब ४ प को भु थ + २ $व_{२}$ असेल.

जर दोरीचा वांकडेपणा मनांत आणिला नाहीं तर वजन प्रेरणेच्या पांचपट असेल.

उदाहरणें.

(१) एकच चलकप्पीअसून तिजवरील दोऱ्या परस्पर स-

मांतर असतील तर प्रेरणे बरोबर वजन असण्यास त्यांमध्यें केवढा कोन असला पाहिजे?

उ. १२०°

(२) एकच चलकप्पी असल्यास तिचें वजन प्रेरणेहून कमी असल्या शिवाय तिजपासून यांत्रिकस्वार्थ मिळणार नाहीं, असे सिद्ध कर?

(३) एका चलकप्पीवरील दोरीच्या दोहों भागांमधील कोन ६०° असेल, तर समतोलत्वास प्रेरणा आणि वजन यांमध्यें काय प्रमाण असलें पाहिजे?

उ. १ : √३.

कप्प्यांची पहिली रचना.

(४) तीन चलकप्प्या असून अगदीं खालच्या कप्पीस २४ शेरांचें वजन टांगिलें आहे; तर त्या वजनास तोलून धरण्यास किती शेरांची प्रेरणा लाविली पाहिजे? कप्प्यांचीं वजनें हिशेबांत धरावयाचीं नाहींत.

उ. ३ शेर.

(५) चार चलकप्प्या पहिल्या रचने प्रमाणें जोडलेल्या आहेत; त्यांचीं वजनें अनुक्रमें ४, ५, २, ६ शेर आहेत तर ४२ शेरांच्या प्रेरणेनें केवढें वजन तोलतें जाईल?

उ. ६१४ शेर.

(६) तीन चलकप्प्या पहिल्या रचनेप्रमाणें जोडलेल्या आहेत; अगदीं खालच्या कप्पीस ५ शेरांचें वजन टांगिलें आहे. प्रत्येक कप्पीचें वजन ३ शेर असेल, तर प्रेरणा केवढी लाविली पाहिजे?

उ. ३$\frac{1}{8}$ शेर.

(७) पहिल्या प्रकारच्या रचनेंत चार चलकप्प्या आहेत व त्यांचा

वजनें अनुक्रमें १, २, ४, ८ पौंड आहेत. आणि वजन १६० पौंड आहे, तर प्रेरणा किती असली पाहिजे?

उ- १२ पौंड.

(८) पहिल्या रचनेंत ३ चलकप्या आहेत. आणि प्रत्येकीचें वजन व आहे आणि अगदीं खालच्या कप्पीस मुळींच वजन टांगिलें नाहीं, तर समतोलत्व राहण्यास प : व : : ७:८ हें प्रमाण असलें पाहिजे असें दाखवा?

(९) प्रेरणा व वजन सारखीं असतील तेव्हां सारख्या वजनाच्या ३ चलकप्या पहिल्या रचनेंत असल्यास प्रत्येकीचें वजन किती असलें पाहिजे?

उ- व.

(१०) अगदीं खालच्या कप्पीशिवाय बाकी कप्प्या गुरुत्वशून्य आहेत, असें कल्पिलें आणि खालच्या कप्पीचें वजन प शेर व प्रेरणाही प शेर असेल, आणि लाविलेलें वजन व शेर असेल, तर असें सिद्ध करकीं कितीही कप्प्या असल्या तरी व वजन प च्या विषमपट असतें.

दुसरी रचना.

(११) एकच दोरी सर्व कप्प्यांच्या खांचीवरून जात आहे व दोरीचे भाग दिक् रेषेंत आहेत. अशा रचनेंत जर खालच्या चौकटींत तीन कप्प्या असल्या आणि कप्प्यांसह चौकटीचें वजन ८ शेर असलें, तर ११२ शेरांचें वजन तोलण्यास किती प्रेरणा असली पाहिजे?

उ- २० शेर.

(१२) खालच्या चौकटींत ३ कप्प्या असतील. व कप्प्यांसह चौकटीचें वजन ८ शेर असेल आणि दोरीच्या एका शेवटास २ शे-

रांची प्रेरणा लाविलेली असून तिचें दुसरें शेवट खालच्या चौकटी
स अडकविलेलें असेल, तेव्हां किती वजन तोललें जाईल.

उ. ६ शेर.

(१३) एक मनुष्य कप्प्यांच्या खाचींतून जाणाऱ्या दोरीच्या शेव-
टास खालीं ओढून आपल्या निम्में वजन कप्प्यांस टांगलेलें तोलून ध-
रीत आहे. वरची चौकट छतास टांगली आहे, व खालच्या चौक-
टीस ७ दोऱ्यांचे भाग आहेत, तर ज्या जमिनीवर मनुष्य उभा आहे
तिजवर त्याचा दाब किती पडत आहे तें काढ?

उ. त्याच्या वजनाचे $\frac{१३}{१४}$.

(१४) खालच्या चौकटीस ३ कप्प्या आहेत, आणि दोरीचा शेव-
ट वरच्या चौकटीस अडकविलेला आहे. खालच्या चौकटीचें व-
जन प्रेरणेच्या तिप्पट आहे. तर प्रेरणेच्या कितीपट वजन तोललें जा-
ईल?

उ. प्रेरणेच्या ३ पट वजन.

(१५) खालच्या चौकटीचें वजन प शेर आणि प्रेरणा प शेर आ-
णि खालच्या चौकटीस टांगलेलें वजन व शेर असेल तर असें सिद्ध
करकीं, जेव्हां दोरीचा शेवट वरच्या चौकटीस टांगला असेल, तेव्हां
प ज्या विषमपट व संख्या असते आणि खालच्या चौकटीस टांग-
लें असेल तेव्हां समपट असते.

तिसरी रचना.

(१६) तिसऱ्या रचनेंत सारख्या वजनाच्या सहा चलकप्प्या
आहेत. जी दोरी वजनास लाविलेली आहे तीच प्रत्येक कप्पीस अ-
डकविलेली आहे, तर कांहीं प्रेरणा न लावितां वजन समतोल राहण्या-
स प्रत्येक कप्पीचें वजन वजनाचा कितवा भाग असला पाहिजे?

उ. $\frac{१}{६४}$.

(१७) तिसऱ्या रचनेंत ६ चलकप्प्या आहेत तर ५०४ शेरांचें वजन तोलण्यास मेरणा किती असली पाहिजे?

उ. ८ शेर.

(१८) तिसऱ्या रचनेंतील ४ कप्प्यांची खालच्या कप्पी वरून वजनें ३, ४, ५, ६ शेर आहेत, तर २४ शेरांच्या मेरणेनें केवढें वजन तोललें जाईल? आणि ७२८ शेरांचें वजन तोलण्यास केवढी मेरणा लावावी लागेल?

उ. वजन ३९८ शेर; मेरणा ४६ शेर.

---

(१९) ४, ८, ४, १० पौंड वजनाच्या चार कप्प्या पहिल्यारचनेंत अत्यंत फायदेकारक अशा क्रमानें लाविल्यास १०० शेरांच्या मेरणेनें केवढें वजन तोललें जाईल?

उ. १५२६ शेर.

(२०) याच कप्प्या अती कमी फायदेकारकरीतीनें पहिल्या रचनेप्रमाणें जोडिल्यास १०० शेरांच्या मेरणेनें केवढें वजन तोललें जाईल?

उ. १४७६ शेर.

(२१) याच कप्प्या तिसऱ्यारचनेंत अत्यंत फायदेकारक अशा क्रमानें जोडिल्यास १५९८ शेरांचें वजन तोलण्यास केवढी मेरणा लाविली पाहिजे?

उ. १०० शेर.

(२२) ३० पौंड मेरणेनें १६५८ शेरांचें वजन उचलण्यास प्रत्येक कप्पी ४ शेरांची अशा पहिल्या रचनेंत किती कप्प्या लाविल्या पाहिजेत?

उ. ६ कप्प्या.

(२३) तिसऱ्या रचनेप्रमाणें ८ कप्प्या जोडलेल्या आहेत,

तर प्रेरणा लाविल्याशिवाय केवळ कप्प्यांच्याच वजनानीच वजन तोललें जाण्यास प्रत्येक कप्पीचें वजन वजनाचा कितवा भाग असलें पाहिजे?

उ. $\frac{१}{२४७}$ भाग.

प्रकरण ११

उतरण आणि पाचर.

(१४२) सर्व मुख्य यंत्रांत उतरण हें फार साधें यंत्र आहे. फार उंचीवर एकादें मोठें वजन चढविण्याचें असलें, म्हणजे याचा उपयोग करितात. कारण जर कांहीं उंचीवर ५०० शेर वजनाचें ओझें चढविण्याचें असलें आणि कोणत्याही यंत्राचा उपयोग केला नाहीं तर ५०० शेरांची शक्ति खर्च करावी लागेल. परंतु उतरणीच्या सहाय्यानें कमी शक्तीनें मोठें वजन चढविलां येतें, आणि येणेंकरून यांत्रिक स्वार्थ होतो. उतरणीवर विवक्षित वजन तोलून धरण्यास किति शक्ति लागेल, व ती उतरणीच्या अवयवांशीं कोणत्या प्रमाणांत असेल हें काढणें.

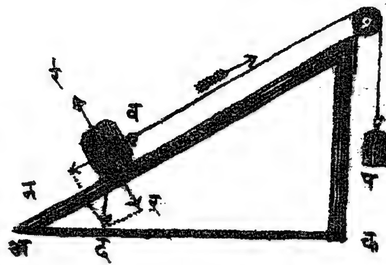
उतरण ही एक सपाटी असून ती क्षितिज मर्यादेच्या सपाटीशीं कोन करिते. ज्या प्रमाणें हा कोन लहान मोठा असेल, त्याप्रमाणें उतरणीचें दुसरें टोंक वर उचललें जाईल; म्हणजे या कोनाच्या मानानें उतरणीची उंची आणि लांबी यां मधील प्रमाण असेल.

एक मोठीशी फळी जमिनीवर एका टोंकानें टेंकून दुसऱ्या

टोंकानें वर उचलून तिर्कस धरिली म्हणजे ती उतरण झाली. आतां फळीची लांबी कायम आहे तिचें दुसरें टोंक ५°, १०°, २०° किंवा ७०° वर उचलावें त्या प्रमाणें उंची वाढेल, आणि उंची व लांबी यांमधील प्रमाण कमी कमी होतजाईल.

(१४४) सपाट पातळीवर जर एकादा पदार्थ ठेविला तर त्याच्या वजनाचा दाब खालच्या दिशेकडे लंबाकार पडेल. आणि पातळीच्या वरच्या दिशेकडे लंबाकार तितक्याच जोराचा प्रतिबंध होईल. दोन्ही प्रेरणा परस्पर समान व उलट असल्यानें पदार्थ स्थिर राहील. परंतु जर उतरणीवर तो पदार्थ ठेविला तर पदार्थ खालच्या दिशेकडे लंबाकार पृथ्वीनें आकर्षिला जाईल. आणि उतरणीच्या पातळीचा प्रतिबंध उतरणीच्या सपाटीशीं लंबाकार होईल, म्हणून वरच्या उलट दिशेस होणार नाहीं; यामुळें त्यानें सर्व पदार्थ तोलला न जातां पदार्थ खालीं सरकेल; आणि त्यास स्थिर ठेवण्यास कांहीं शक्ति उलट दिशेस लावावी लागेल. ही शक्ति उतरणीच्या लांबीशीं समांतर किंवा तिच्या पायाशीं समांतर किंवा उतरणीच्या सपाटीशीं कोणता तरी कोन करणारी अशी लावितां येईल. या तिन्ही रीतींत प्रेरणा आणि वजन यामध्यें संबंध काय असतो हें काढिलें पाहिजे.

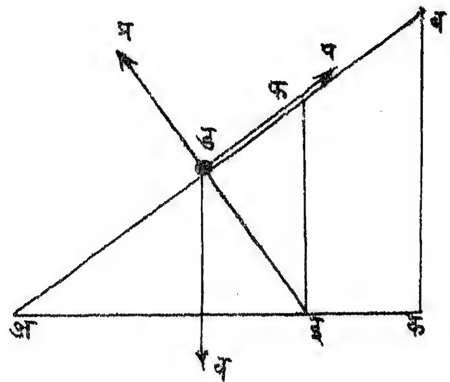
उतरणीस लंबाकार कापिलें असतां बाजूनें जशी दिसेल त्याचें चित्र खालीं अबक दाखविलें आहे. त्यांत अब जी उतरणीची सपाटी तिला तिची लांबी म्हणतात. ती आम्हीं ल या अक्षरानें दर्शवूं. बक ही तिची उंची आहे. ती उ या



अक्षरानें आणि अक तिचा पाया किंवा तळ त या अक्षरानें द-

ईबू आणि क अब हा जो कोन उतरणीची सपाटी पायाशीं किंवा त्या-शीं करिते त्यास उतरणीचा कल म्हणतात. या उतरणीवर जर व वजन ठेविलें तर त्याजवर गुरुत्वाकर्षणाचें कार्य वढ रेषेंत होईल. परंतु त्या रे-षेंत ज्या जोरानें वजन खालीं येईल त्याच जोरानें उतरणीवरून खालीं सरकणार नाहीं. या जोराच्या किंवा प्रेरणेच्या एकापृथग्भूत भागानें प-दार्थ खालीं सरकेल. वढ प्रेरणेचें वन अबशीं समांतर आणि तिशीं काटकोन करणारी वर अशा दोन प्रेरणांत पृथक्करण केलें तर वन प्रेरणेनें पदार्थ खालीं सरकेल. आणि वर प्रेरणेनें उतरणीच्या स-पाटीवर दाब पडेल. व त्याच रेषेंत उलट दिशेनें उतरणीच्या सपा-टीचा तेवढाच प्रतिबंध होईल. वन प्रेरणेनें पदार्थ खालीं सरके-ल त्यास सरकूं न देण्याकरितां प्रेरणा लावितात.

(१४७.) जेव्हां उतरणीवर वजनास तोलून धरणारी प्रेरणा उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करिते तेव्हां प्रेरणा आ-णि वजन यांजमधील संबंध काढणें.



समजा कीं अबक उतरणीवर व वजनाचा ड पदार्थ अब सपाटीशीं स-मांतर दिशेंत कार्य करणाऱ्या प प्रेरणे-नें तोलून धरिला आ-हे. तर प आणि व यांमध्यें काय संबंध असेल, तो काढणें आ-हे.

ड पदार्थावर तीन प्रेरणांचें कार्य घडून तो पदार्थ स्थिर रा-

हिला आहे. त्याचें वजन ड व दिशेंत कार्य करीत आहे. ती प्रेरणा व या अक्षरानें दर्शवूं. अ ब सपाटीचा प्रतिबंध सपाटीशीं लंब अशा ड प्र दिशेनें कार्य करितो; आणि प प्रेरणा ड प दिशेंत कार्य करिते. या तीन प्रेरणांनीं पदार्थ समतोल आहे. यास्तव प्रेरणा त्रिकोणाच्या सिद्धांताप्रमाणें या प्रेरणांच्या दिशा ज्या त्रिकोणाच्या बाजूंशीं समांतर आहेत त्या त्रिकोणाच्या बाजू या प्रेरणांशीं सम प्रमाणांत असतील.

ड प्र रेषा ड कडे अ क स इ स्थळीं मिळेपर्यंत वाढीव आणि इ पासून इ फ रेषा ड व शीं समांतर काढ. ती ड प स फ स्थळीं मिळते. ड इ फ त्रिकोणाच्या ड फ, फ इ, आणि ड इ बाजू प, व आणि प्र या तीन प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत म्हणून प : व : प्र : : ड फ : फ ई : ड इ. परंतु ड फ इ त्रिकोण अ ब क त्रिकोणाशीं सरूप आहे. कारण ∠अ क ब काटकोन = ∠फ ड ई काटकोन, ∠ड फ इ = ∠अ ब क आणि बाकी ∠ड ई फ = ∠ब अ क.

यास्तव ड फ : फ ई : ड ई : : ब क : अ ब : अ क.

∴ प : व : प्र : : ब क : अ ब : अ क : : उ : ल : त.

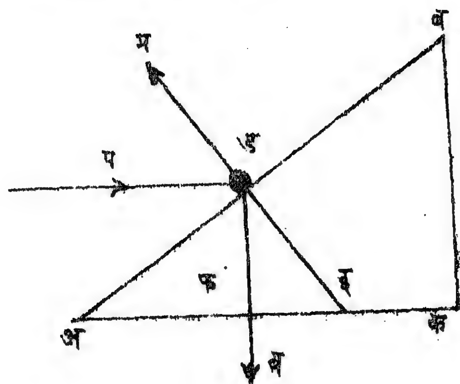
$$\therefore \frac{प}{व} = \frac{उ}{ल};\ \frac{प}{प्र} = \frac{उ}{त};\ \frac{व}{प्र} = \frac{ल}{त}.$$

यावरून प आणि व यांचें प्रमाण उंची आणि लांबी यांच्या प्रमाणा बरोबर असतें; किंवा पदार्थास तोलून धरणाऱ्या तिन्ही प्रेरणा उतरणीच्या तिन्ही बाजूंशीं प्रमाणांत असतात.

(१४६) जेव्हां पदार्थास तोलून धरणारी प्रेरणा उतरणीच्या पायाशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करिते तेव्हां प्रेरणा आणि पदार्थाचें वजन यां मधील संबंध काढणें.

समजा कीं अ ब क उतरणीवर व वजनाच्या ड या पदार्थास अ क शीं समांतर अशा ड प दिशेंत कार्य करणाऱ्या प प्रेर-

णेनें तोलून धरिलें आहे. ड पदार्थाचें वजन डव दिशेनें पृथ्वीकडे आकर्षिलें जाईल. आणि अब शीं लंब अशा डम्र दिशेनें अब उतरणीचा प्रतिबंध होईल. यांस व आणि म्र हीं नावें देऊं, तर प, व आणि म्र यातीन प्रेरणांनीं ड पदार्थास समतोल धरिलें आहे. डम्र रेषा ड कडे वाढीव ती अकस ई स्थळीं मिळते आणि डव रेषा अकस फ स्थळीं मिळते.



आतां डफई त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू प, व, म्र या प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत. म्हणून (क० ३०) प्रमाणें.

प: व: म्र:: फई: डफ: डई.

परंतु डफई त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं सरूप आहे. कारण ∠डफई काटकोन = ∠अकब काटकोन आणि ∠अ + ∠अडफ = १ काटकोन = अडफ + ∠फडई ∴ ∠अ = ∠फडई आणि बाकी ∠ब = ∠डईफ.

∴ यु० पु० ६ सि० प्रमाणें.

फई: फड: डई:: बक: अक: अब.

∴ प: व: म्र:: बक: अक: अब:: उ: त: ल.

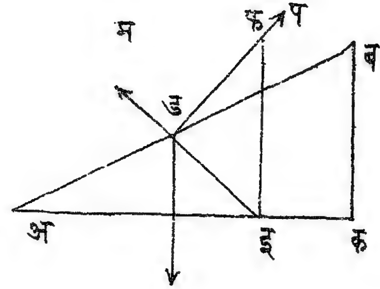
$\frac{प}{व} = \frac{उ}{त}$; $\frac{प}{म्र} = \frac{उ}{ल}$; $\frac{व}{म्र} = \frac{त}{ल}$.

या ठिकाणीं प्रेरणा आणि पदार्थाचें वजन यां मधील प्रमाण उंची आणि तळ यांच्या प्रमाणा बरोबर असतें. परंतु तिन्ही प्रे-

रणा उतरणीच्या तिन्ही बाजूंशीं दुसऱ्या रीतीनें प्रमाणांत असतात.

(१४७) जेव्हां पदार्थास तोलून धरणारी प्रेरणा उतरणीच्या सपाटीशीं कोणता तरी कोन करणाऱ्या दिशेंत कार्य करिते तेव्हां पदार्थाचें वजन आणि प्रेरणा यांमधील संबंध काढणें.

या स्थळीं प प्रेरणा अब सपाटीशीं ए° या कोन करणाऱ्या डप दिशेंत कार्य करीत आहे. बाकी सर्व प्रेरणा पूर्वीप्रमाणेंच आहेत.



डम रेषा ड कडे अक स इ स्थळीं मिळे-पर्यंत वाढीव, आणि ई पासून इफ रेषा डब शीं समांतर काढ: ती डप स फ स्थळीं मिळते.

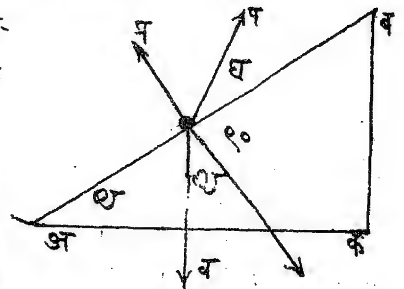
डइफ त्रिकोणाच्या डफ, फइ आणि डइ या तीन बाजू प, व, आणि प्र या प्रेरणांच्या दिशांशीं समांतर आहेत.

∴ प: व: प्र: : डफ : फइ : डई.

या स्थळीं डफई त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं सरूप नाहीं आणि या रीतीनें प्रेरणा कार्य करीत असेल तेव्हां प आणि व उतरणीच्या बाजूंशीं कोणत्याही प्रमाणांत नसतात.

(१४८) त्रिकोणमितीच्या आधारें तिन्ही रीतींस लागूपडण्याजोगी एकच सारणी काढितां येते.

समजा कीं ड पदार्थास अबक उतरणीवर प, व आणि प्र या प्रेरणांनीं तोलून धरिलें आहे.



प प्रेरणेची दिशा उतरणीच्या अब सपाटीशीं घ° कोन करिते आणि उतरणीचा कल. ब अ क = थ°

प,व,म प्रेरणा समतोल आहेत म्हणून. (क० ३३ प्रमाणें.)

प : व : म :: भुज∠व म : भु∠प म : भु∠प व.

:: भु·(१८०° − थ) : भु·(९०° + घ) : भु(९०+थ+घ)

प : व : म :: भु·थ : कोभु·घ ∴ कोभु(थ + घ)

$\frac{\text{प}}{\text{व}}=\frac{\text{भुथ}}{\text{कोभुघ}}$; $\frac{\text{प}}{\text{म}}=\frac{\text{भुथ}}{\text{कोभु(थ+घ)}}$; $\frac{\text{व}}{\text{म}}=\frac{\text{कोभुघ}}{\text{कोभु(थ+घ)}}$

(१) जेव्हां प प्रेरणा उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशी कार्य करिते तेव्हां घ = ०

∴ प : व : म :: भु·थ : कोभु(०) : कोभु(थ).

:: भुथ : १ : कोभुथ.

$\frac{\text{प}}{\text{व}}=\text{भुथ}$; $\frac{\text{प}}{\text{म}}=\frac{\text{भुथ}}{\text{कोभुथ}}=\text{स्पर्शथ}$; $\frac{\text{व}}{\text{म}}=\frac{१}{\text{कोभुथ}}$

∴ $\frac{\text{प}}{\text{व}}=\frac{\text{बक}}{\text{अब}}=\frac{\text{उ}}{\text{ल}}$; $\frac{\text{प}}{\text{म}}=\frac{\text{बक}}{\text{अब}}\div\frac{\text{अक}}{\text{अब}}=\frac{\text{बक}}{\text{अक}}=\frac{\text{उ}}{\text{त}}$.

आणि $\frac{\text{व}}{\text{म}}=१\div\frac{\text{अक}}{\text{अब}}=\frac{\text{अब}}{\text{अक}}=\frac{\text{ल}}{\text{त}}$

(२) जर प्रेरणा उतरणीच्या पायाशीं समांतर दिशेंत कार्य करीत असेल तर–

घ = −थ असेल.

∴ प : व : म :: भु·थ : कोभु(−थ) : कोभु(थ−थ).

प : व : म :: भु·थ : कोभुथ : १.

$\frac{\text{प}}{\text{व}}=\frac{\text{भुथ}}{\text{कोभुथ}}=\text{स्पर्शथ}$; $\frac{\text{प}}{\text{म}}=\text{भुथ}$; $\frac{\text{व}}{\text{म}}=\text{को·भु·थ}$

$\frac{\text{प}}{\text{व}}=\frac{\text{बक}}{\text{अब}}\div\frac{\text{अक}}{\text{अब}}=\frac{\text{बक}}{\text{अक}}=\frac{\text{उ}}{\text{त}}$.

$$\frac{प}{म} = भुथ = \frac{बक}{अब} = \frac{उ}{ल}$$

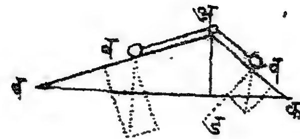
$$\frac{व}{म} = कोभुथ = \frac{अक}{अब} = \frac{न}{ल}.$$

या प्रमाणें त्रिकोणमितीच्या आधारें काढलेल्या सारणीवरून बाकीच्या सारण्या निघतात.

---

(१४९) दुरी उतरण— वरील विवेचनावरून हें उघड आहे कीं जर एकच उंचीच्या दोन उतरणीवर दोन वजनें एकमेकांस तोलून धरितील तर तीं उतरणीच्या लांब्यांच्या प्रमाणांत असतील. हें स्पष्टपणें सिद्ध करूं.

या आकृतींत दुरी उतरण अबडक दाखविली आहे. यांची उंची अड सारखी आहे. यांचे उतार सारखे नाहींत. व पायेही सारखे नाहींत. ब, बे हीं दोन वजनें एका दोरीस बांधून ती दोरी उतरणीच्या माथ्यावरील



अ कप्पीवरून सोडिली आहे. व तीं वजनें समतोल आहेत. आतां जेवढ्या प्रेरणेनें ब वजन तोललें आहे, तेवढ्याच प्रेरणेनें बे वजन ही तोललें गेलें आहे. ती प्रेरणा क्ष आहे असें समजूं. तर (क. १४५ प्रमाणें.)

$$\frac{क्ष}{व} = \frac{अड}{अब} ; \frac{क्ष}{वे} = \frac{अड}{अक} .$$

दुसऱ्यास पहिल्यानें भागून.

$$\frac{क्ष}{वे} \div \frac{क्ष}{व} = \frac{क्ष}{वे} \times \frac{व}{क्ष} = \frac{अड}{अक} \div \frac{अड}{अब} = \frac{अड}{अक} \times \frac{अब}{अड}$$

$$\therefore \frac{व}{वे} = \frac{अब}{अक}.$$

(१५०) व्यावहारिक उपयोग— फार उंचीवर मोठीं वजनें चढविण्यास उतरणीचा उपयोग होतो. पूर्वी तोफा गोळ्या वगैरे नसत, तेव्हां उंच इमारती बांधतेवेळीं दगड चढविण्यास अशा उतरणीच करीत. मोठ्या डोंगरावर चढण्यास सडक करिते वेळीं रस्ता लहान लहान अशा अनेक उतरणीचा वांकडा तिकडा करितात. ओझ्याच्या बैलास डोंगरावर चढवितांना त्यास समोर न चढवितां एका बाजूवरून दुसऱ्या बाजूस या प्रमाणें तिरकस चढवीत नेतात. येणेंकरून चढ तितक्या जास्त उतरणीत वांटला जातो. सर्व प्रकारचे जिने उतरणी आहेत. त्या उतरणीवर पाय ठेवण्यास चांगलें ठिकाण असावें म्हणून पायऱ्या करितात. मोठीं गलबतें समुद्रांत लोटण्यास व समुद्रांतून जमिनीवर घेण्यास उतरणीच केलेल्या असतात. तसेंच मोठ्या तारवांत किंवा गाड्यांत पिपें वगैरे चढविण्यासही उतरणीचाच उपयोग करितात. मोटेचा वरवंटा हें नेहमींच्या पाहण्यांतलें उतरणीचें उदाहरण होय.

उदाहरणें

(१) एका उतरणीचा चढ १३ फूट लांबींत ५ फूट आहे तर त्या उतरणीवर ९१ शेरांचें वजन तोलून धरण्यास उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशा दिशेंत किती शेरांच्या शक्तीनें कार्य केलें पाहिजे?

उ. ३५ शेर.

(२) उतरणीचा चढ २५ फुटांत २ फूट आहे. तर उतरणीवर १००० पौंडाचें वजन तोलण्यास उतरणीच्या पायाशीं किंवा क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा दिशेंत किती शेरांच्या शक्तीचें कार्य झालें पाहिजे?

उ.८० $\frac{3}{10}$ शेर.

(३) उतरणीच्या लांबीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करणाऱ्या २ शेरांची शक्ति आणि ३ शेरांची शक्ति या अनुक्रमें उतरणीवर ४√२ शेर आणि ६ शेर या वजनांस तोलून धरितात. तर उतरणीचा कल काय असेल?

उ. ४५° आणि ३०°

(४) ज्या उतरणीचा चढ ६५ त १६ आहे. त्या उतरणीवर ५०४ पौंडांचें वजन उतरणीच्या पायाशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करणाऱ्या प्रेरणेनें तोलून धरिलें आहे. तर त्याचा उतरणीवर दाब किती पडेल, म्हणजे सपाटीचा प्रतिबंध किती असेल?

उ० ५२० शेर.

(५) ज्या उतरणीवर वजनाच्या निम्मे दाब पडतो म्हणजे उतरणीच्या निम्मे सपाटीचा प्रतिबंध होतो, तर तिचा कल किती असावा?

उ. ६०°

(६) एका उतरणीचा कल ३०° आहे, आणि उतरणीवरील वजनावर ज्या प्रेरणेचें कार्य होतें, तिची दिशा उतरणीशीं ३० अंशांचा कोन करिते. तर असें सिद्ध करकीं, व = प√३ असेल.

(७) एका आगगाडीच्या डब्याचें वजन ३० टन आहे व त्यास दोरी लावून वाफेच्या यंत्रानें जिचा चढ ६० त १ फूट आहे. अशा उतरणीवर चढवावयाचें आहे. तर त्या दोरीचा निदा-

न ताण किती पौंडाचा असला पाहिजे? उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत शक्ति कार्य करीत आहे.

उ. ११२० पौंड.

(८) अबक या उतरणीची जेव्हां अब लांबी असते व अक पाया असतो, तेव्हां अबशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी २ शेरांची प्रेरणा उतरणीवर ५ शेरांचें वजन तोलून धरिते. तर तीच उतरण अक पाया व बक उंची अशी ठेविल्यास तिजवर तेवढीच शक्ति किती वजनास तोलून धरील?

उ. २ ३/५ शेर.

(९) विवक्षित शक्ति उतरणीच्या पायाशीं समांतर दिशेंत कार्य करीत असतां जेवढें वजन उतरणीवर तोलून धरूं शकते त्याच्या निमें वजन तीच शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करूं लागल्यास उतरणीवर तोलून धरिते. तर त्या उतरणीचा कल किती असेल.

उ. ६०°

(१०) एका उतरणीची लांबी ५ फूट व उंची ३ फूट आहे. तर १०४ शेरांच्या वजनाचे कसे २ विभाग करावे, म्हणजे १ विभाग उतरणीच्या माथ्यावरून खालीं लोंबत असतां उतरणीवर ठेविलेल्या दुसऱ्या विभागास तोलून धरूं शकेल.

उ. ३९ शेरांचें वजन खालीं लोंबत रहावें.

(११) विवक्षित शक्ति क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करीत असतां किंवा तीच शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करीत असतां जास्त वजन तोलून धरील.

उ. उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी शक्ति.

(१२) उतरणीच्या सपाटीवर २० शेरांचें वजन लाविलेल्या

दोरीचा शेवट सपाटीवरच्या एका बिंदूस अडकविला आहे. दोरी १० शेरांचें वजन मात्र तोलण्याजोगी घट्ट आहे, तर उतरणीचाकल हळू हळू वाढवीत गेल्यास केव्हां दोरी तुटेल.

उ. ३०° हून जास्त कल झाल्यावर.

(१३) उतरणीवर विवक्षित वजन तोलून धरण्यास १० शेरांची शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करिते; आणि २० शेरांची शक्ति तेंच वजन तोलण्यास क्षितिज पातळीशीं समांतर दिशेंत कार्य करिते; तर उतरणीचा कल काद?

उ. ६०°

(१४) एका उतरणीवर उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी १२ शेरांची प्रेरणा २० शेरांच्या वजनास तोलून धरिते. तर असें सिद्ध करकीं तेंच वजन तोलून धरण्यास क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा दिशेंत शक्ति लावणें झाल्यास ४ : ५ या प्रमाणानें वाढविली पाहिजे; आणि उतरणीवरील दाब १६ : : २५ या प्रमाणानें वाढेल.

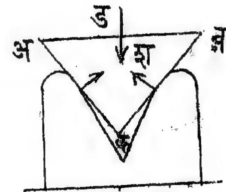
(१५) उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी शक्ति उतरणीवरील दाब, आणि वजन हीं १ : √३ : २ या प्रमाणांत आहेत तर त्या उतरणीचा कल काय असावा?

उ. ३०°

पाचर.

(१५,१) पायें एकाजवळ एक असे एका पातळींत राहण्या जोग्या दोन उतरणी एकत्र जोडल्या म्हणजे पाचर बनतें. उतरण स्वतः सरत नाहीं, परंतु पाचरास शक्ति लाविली म्हणजे तें पुढें जातें म्हणून यास कधीं कधीं चल दुरी उतरण असेंही नांव देतात. उतरणींचीं दोन शेवटें समान व सरूप त्रिकोणाकार असतात. व बाकी तीन बाजू काटकोनाकार समांतर भुज चौकोनाच्या आकाराच्या असतात.

अब कडेस पाचराची धार असें म्हणतात आणि कड ईफ समांतर भूज चौकोनास पाचराचा माथा असें म्हणतात. पाचराचा मुख्यत्वें उपयोग लांकूड, दगड वगैरे पदार्थ चिरण्यास किंवा सोडविण्यास करितात. कुऱ्हाडी, सुताराचीं किंकरी, रंधे, तरवारी, व चाकूची पाती इत्यादि पाचराचींच उदाहरणें होत. लांकडांत पूर्वी बारीक चीर पाडून त्यांत पाचर घालतात आणि पाचराच्या डोक्यावर हातोडा अथवा मोगरा यांचे घाव मारून त्यास पुढें सारतात. दुसऱ्या यंत्रांप्रमाणें यावर शक्तींचें एकसारखें कार्य चालत नाहीं. वास्तविक टोल्यांच्या आघातानें पाचराचे परिणाम घडतात, म्हणून याचा विचार यंत्रस्थितिशास्त्रांत येत नाहीं. परंतु साधारणतः पाचराच्या समतोलत्वाचा नियम समजावयाकरितां त्याचें दिग्दर्शन केलें आहे.



(१५,२) पाचराच्या माथ्याशीं लब अशा पातळीनें केलेले पाचराचे छिन्न अबक त्रिकोण आहे असें समजूं श शक्ति पाचराच्या माथ्याच्या ड मध्यावर लाविलेली आहे, आणि त्या शक्तीनें पाचर लां-

कडान शिरत आहे व त्यावेळी लाकडाचा प्रतिबंध **अक** आणि **बक** बाजूंवर होईल, तो प आणि फ आहे, असें समजूं. हे प्रतिबंध **अक**, **बक** बाजूशीं लंब दिशेनें कार्य करितील. आणि **श** शक्ति ही अबशीं लंब अशा दिशेनेंच कार्य करील. यास्तव श, प, फ या तीन प्रेरणांनीं पाचर समतोल आहे. या तिन्ही प्रेरणांच्या दिशा **अबक** त्रिकोणाच्या तिन्हीं बाजूंवर लंब आहेत. म्हणून या तिन्हीं प्रेरणा त्रिकोणाच्या तिन्हीं बाजूशीं प्रमाणांत असतील. (प्रकरण २ उ. ६, पृ. ६५ पहा.)

∴ श : प : फ : : अब : अक : बक.

जर अक = **बक** असेल तर पाचरास समद्विभुज पाचर असें म्हणतात. आणि अशा वेळीं प आणि फ हे प्रतिबंध समान असतील.

∴ श : प : : अब : अक.

तसेंच श : प : : अब : बक.

∴ श : २प : : अब : अक + बक = २अक.

२प म्हणजे पाचराचा सर्व प्रतिबंध आहे तो प्र या अक्षरानें दर्शविल्यास:-

श : प्र : : अब : २अक.

किंवा $\frac{\text{श}}{\text{प्र}} = \frac{\text{अब}}{\text{२अक}}$.

जर समद्विभुज पाचरांत **अकब** कोन २७ असेल तर **अब** = २अक·भु ७

∴ $\frac{\text{श}}{\text{प्र}}$ = भु ७, आणि $\frac{\text{श}}{\text{प}} = \frac{\text{अब}}{\text{अक}} = \frac{\text{२ अकभु}\cdot\text{७}}{\text{अक}}$ = २ भु ७.

व्यावहारिक उपयोग- सर्व कापण्याचीं वटोंचण्याचीं ह

त्यारें जसें चाकू, सुया, वस्तरे, कातऱ्या, किंकरी, कुऱ्हाडी वगैरे पाचराचीं उदाहरणें होत. ज्या कामाकरितां उपयोग करून घेणें असेल त्या प्रमाणें पाचराचा कोन लहान किंवा मोठा असतो. लांकूड कापण्यास ज्या किंकऱ्यांचा उपयोग करितात त्याचा कोन ३०° चा असतो. लोखंड कापण्याच्या हत्याराचा कोन ५०° पासून ६०° चा असतो. पितळ कापण्याकरितां ८०° पासून ९०° पर्यंत असतो. जीं हत्यारें केवळ दाबानें खुपसावयाचीं असतात, त्यांपेक्षां जीं टोले मारून आंत सारावयाचीं असतात तीं कमी तीक्ष्ण असलीं तरीं चालतात. पदार्थ फार मृदु असला म्हणजे त्यास चिरण्यास हत्यार फार तीक्ष्ण लागतें. करवत हा अनेक पाचरांचा बनलेला असतो. चाकू किंवा वस्तरा यांच्या धारी ही सूक्ष्मदर्शक यंत्रानें पाहिल्यास करवता सारख्या दिसतात. धारेवर बोट फिरविल्यानें ही करवता सारखा आकार असल्याचें अनुभवास येईल. जे मोठमोठे खडक इतर रीतींनीं फुटणार नाहींत, त्यांस पाचरानें अल्पायासानें चिरतां येतें. मोठालीं गलबतें सुक्या जमिनीवर असतात, त्यांच्या बुधा खालीं पाचरा ठोकिल्यानें तीं सहज उचलितां येतात. उंच दिपमाळा व इमारति जमिनीच्या ओलेपणामुळें किंवा दुसऱ्या कारणानें एका बाजूस तोलतात. त्यांच्या त्या बाजूस पाचरा ठोकून त्यांस सरळ करितां येतें.

उदाहरणें.

(१) पाचराची लांबी १$\frac{१}{२}$ फूट आहे. रुंदी $\frac{१}{५}$ फूट आहे. व त्यावर १०० शेरांच्या जोरानें दाबिलें तर किती शेरांचें वजन उचललें जाईल?

उ॰ ७५० शेर.

(२) समद्विभूज काटकोनाकार एक पाचर आहे. त्यावर का-

टकोनाच्या समोरच्या बाजूस ५० शेरांची प्रेरणा कार्य करीत आहे तर त्याच्या दुसऱ्या दोन बाजू किती शेरांचा प्रतिबंध करूं शकतील?

उ. २५√२ शेर.

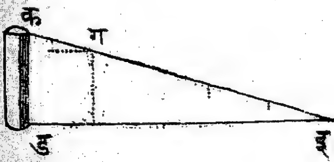
(३) एक पाचर समभुज त्रिकोणाकार आहे. त्याच्या दोन बाजू प्रत्येकीं ४० शेरांचा दाब पाडीत आहेत. तर त्याच्या तिसऱ्या बाजूवर किती शेरांची प्रेरणा लागू केली असावी?

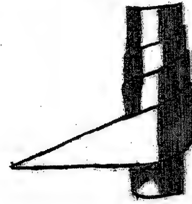
उ. ४० शेर.

प्रकरण १२

मळसूत्र.

(१५३) मळसूत्र हें केवळ साधें यंत्र असून काहींसें मिश्र यंत्र आहे. कारण यास फिरविण्यास दांडा अथवा उच्चालक लागतो. उच्चालकाचा उपयोग केल्यावर पदार्थ दाबण्यास व मोठी वजनें उचलण्यास मोठ्या सामर्थ्याचें हें मिश्र यंत्र होतें. मळसूत्र उतरणीचाच रूपभेद आहे. उतरणीच्या आकाराचा कडइ हा कागदाचा तुकडा कापावा. आणि तिच्या कड उंची एवढ्या उंचीचा एक गोल रूळ घ्यावा. उतरणीची कड बाजू रुळास चिकटवून उतरण रुळाभोंवती गुंडाळावी म्हणजे बाजूस दाखविल्या

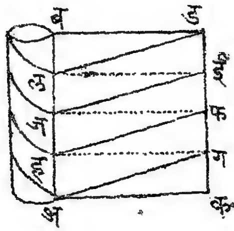




प्रमाणें उतरणीची कइ धार दांड्यावर सर्पाकृति दिसेल. हें सर्पाकृति सूत्र मळसूत्राची धार दर्शवितें. क बिंदुखालीं बरोबर कइचा ग बिंदु येईल. तर कग मळसूत्राचा एक वेढा होईल. त्याचा दुसरा तिसरा वगैरे वळसे एवढेच होतील. प्रत्येक वळसा म्हणजे एकेक उतरण असून ती दांड्या सभोंवती गुंडाळून मळसूत्राचा एकेक वेढा बनतो. आणि जेवढे वेढे असतील तेवढ्या सरूप उतरणी गुंडाळून मळसूत्र बनलेलें असतें.

(१५४) वास्तवीक एकास एक लागलेल्या व सारख्या आ-

काराच्या अनेक उतरणी गोल रूळाभोंवती गुंडाळून मळसूत्र झालें-लें असतें. याची चांगली कल्पना येण्याकरितां एक रूळ घेऊन त्या-च्या परिघा एवढी ज्याची रुंदी आहे असा रूळाच्या लांबी एवढा



काटकोन चौकोनाकार अबकड काग-दाचा तुकडा कापावा. नंतर त्याच्या कड बाजूचे हवे तितके सारखे भाग पाडावे. उ-दाहरणार्थ तिचे सारखे चार विभाग ग,फ, इ स्थळीं केले आहेत नंतर अग सां-धून अग शीं फ,इ,ड या बिंदूंतून, समांतर रेषा काढाव्या किंवा ग,फ,इ पासून अक शीं समांतर रेषा काढून अग, हफ, जई आणि लड कर्ण काढावे म्हणजे अकग, हगफ, जफई आणि लईड सारख्या आकाराच्या उतरणी हो-तील. रेघा बाहेरून दिसतील असा हा चौकोनी कागद रूळा-वर गुंडाळला तर अग, हफ, इत्यादि समांतर रेषांची एकच सलग सर्पाकृति मळसूत्राची धार दिसेल आणि त्याचा एकेकवे-ढा एकेक उतरणीच्या लांबीबरोबर असेल. यांत गअक को-न म्हणजे उतरणीचा कल हाच मळसूत्राच्या सूत्राचा कल आहे. यास मळसूत्राचा कोन म्हणतात. उतरणीची उंची कग म्हणजे सूत्राच्या दोन जवळ जवळच्या वेढ्यांमधील अंतर आहे.

$$\frac{कग}{अक} = स्पर्शरे \cdot \angle गअक \therefore कग = अक \times स्पर्शरे \cdot$$

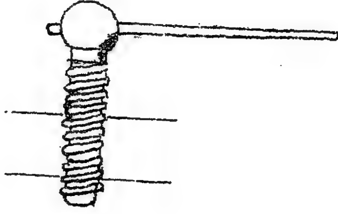
$\angle$गअक. अक लांबी रूळाच्या परिघाबरोबर आहे. जर रूळा-ची त्रिज्या त आणि व्यास आणि परीघ यांमधील प्रमाण प्र क-ल्पिलें तर अक = २प्रत होईल. कग = २प्रत $\times$ स्पर्शरे $\cdot\angle$ग-अक होईल. गअक कोन म्हणजे मळसूत्राचा कल ठ अक्षरानें दर्शविला तर, सूत्राच्या दोहों वळ्यांमधील अंतर कग = २ प्रत $\times$

स्पर्शरेष होईल. अग ही सूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी आहे.

$$\frac{\text{अग}}{\text{गक}} = \text{भुष} \;\therefore\; \text{अग} = \text{कग}\cdot\text{भुष}.$$ अग म्हणजे सूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी ल आणि कग म्हणजे सूत्रांतर अ कल्पिल्यास. $\text{भुष} = \frac{\text{अ}}{\text{ल}}$.

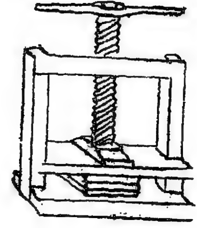
(१७,७,) मळसूत्राचें सर्पाकृति सूत्र केवळ रूळाच्या आंगाबरोबर त्याच्या सपाटीपासून वर आलेलें असलें म्हणजे खरें मळसूत्र बनतें. सूत्राची ही फ़ग काटकोन चौकोनाचा सपाटीशीं किंवा रूळाच्या पृष्ठभागाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी व रूळाच्या आंसाशीं समांतर अशा पातळीशीं लंब असते. दोहों सूत्रांमधील अंतर रूळाच्या आंसाशीं समांतर मानिलें तर तें सर्व ठिकाणीं सारखें आणि कगबरोबर असतें.

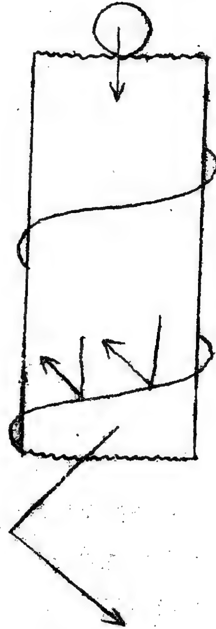
मळसूत्र उतरणीचा रूपभेद आहे, म्हणून यांतील यांत्रिक स्वार्थीचें प्रमाण उतरणी प्रमाणें काढतां येईल. परंतु उतरणींत जसें वजन उतरणीच्या सपाटीवर ठेवितात आणि सपाटीचा प्रतिबंध त्या वजनास होतो, त्या प्रमाणें मळसूत्रांत वजन त्याच्या सूत्रावर ठेवीत नाहींत. वजन मळसूत्राच्या दांड्याच्या माथ्यावर ठेवितात आणि तें खालीं जाण्यास प्रतिबंध दुसऱ्या एका मळसूत्राच्या योगानें लागू करितात. मळसूत्र एका पोकळ चाकींतून फिरतें. चाकी आंतून पोकळ व वाटोळी असते, आणि तिच्या आंतील बाजूस सर्पाकृति खोलगट खांच अशी असते कीं, खांचेंत मुख्य मळसूत्राचे सूत्र बरोबर बसतें. याच्या योगानें प्रतिबंध लागू होण्यास मळसूत्र किंवा चाकी यांपैकीं एक अचल असावें लागतें. जेव्हां चाकी अचल असते तेव्हां मळसूत्राच्या एका टोंकास उच्चालक लावून त्यानें मळसूत्र फिरवावें लागतें व तेणेंकरून तें एका टोंकापासून दुसऱ्या टोंकापर्यंत जातें.



जेव्हां मळसून अचल असतें, परंतु त्याच्या आंसाच्या रेषेंत खालवर जाऊं शकते, तेव्हां चाकीस उचालक लावून चाकीस त्यानें फिरविलें म्हणजे मळसुन्न खालवर एका टोंकापासून दुसऱ्या टोंकापर्यंत नेतां येतें आणि येणेंकरून दाब पाडितां येतो, किंवा वजन उचलतां येतें.

(१७,६,) समजा कीं ब वजन मळसूत्रावर ठेविलें आहे तें आपल्या वजनानें खालीं उतरण्यास यत्न करील. त्यास उतरण्यास चाकीचा कांहीं प्रतिबंध होईल. त्यास वर चढविण्यास किंवा खालीं अगदीं नउतरू देतां तोलून धरण्यास मळसूत्राच्या बुडापाशीं प्रेरणा लावावी लागेल. ती प्रेरणा मळसूत्राच्या आंसाशीं लंब अशा उचालकानें कांहीं शक्ति लावून उचालक फिरविला म्हणजे चाकींतून मळसून वर जाईल आणि वजन उचलेल. किंवा त्या प्रेरणेनें वजनास तोलून धरितां येईल. प्रेरणा लावून उचालक फिरविल्यानें वजन ज्या दिशेनें खालीं येत होतें त्याच्या उलट दिशेनें स्क्रू वर जाईल. म्हणजे प्रेरणेची कार्यदर्शक दिशा वजनाच्या उलट असेल. उचालकास एक फेरा दिला म्हणजे मळसूत्रास एक फेरा मिळेल. आणि दोहों





सूत्रांमध्यें अंतर असेल. तितकें वजन वर उचलेल. म्हणून मळसूत्रापासून जो फायदा होतो त्याची गणना करितांना दोन गोष्टींचा विचार केला पाहिजे.(१) ज्या दांड्यावर किंवा रुळावर मळसूत्र आहे त्याचा परीघ आणि(२)त्यामळसूत्राच्या सूत्रामधील अंतर. मळसूत्राच्या एका फेऱ्यापासून दुसऱ्या फेऱ्यापर्यंत वजन चढण्यास मळसूत्राचा दांडा एकवेळ फिरला पाहिजे, हें उघड आहे. यास्तव मळसूत्राच्या परिघास जसें सूत्रांमधील अंतर तसें शक्तिस वजन होईल. परंतु मळसूत्राचा परिघ लहान असतो या करितां नुस्तें मळसूत्र फिरवूं लागल्यास फार जोर लागतो व असा मळसूत्राचा उपयोग ही करीत नाहींत. मळसूत्र फिरविण्यास मळसूत्राच्या आंसाशीं लंब अशा दिशेंत एक आडवा दांडा उच्चालकाप्रमाणें लावूनच मळसूत्र फिरवितात, आणि जशी उच्चालकाची अधिकाधिक लांबी असेल त्या प्रमाणें थोड्या शक्तीनें मळसूत्र फिरतें व जास्त फायदा होतो. या उच्चालकाच्या बाहेरील टोंकानें जो परिघ होतो त्यासच मळसूत्राचा परिघही म्हणतात. हा परिघ सूत्रांतरापेक्षां जितका मोठा असेल तितका यांत्रिक स्वार्थ वाढेल. यावरून हें उघड झालें कीं, मळसूत्र फिरविण्याचा दांडा जितका लांब असेल आणि मळसूत्राचीं सूत्रें जितकीं अति जवळ असतील तितकी त्या मळसूत्राची शक्ति अधिक होईल. म्हणून या यंत्राचें सामर्थ्य वाढविण्यास ज्या उच्चालकानें शक्ति लागू होत्ये त्याची लांबी वाढवावी अथवा सूत्रांमधील अंतर कमी करावें. जर एका मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर १ इंच आणि दुसऱ्याच्या सूत्रांमधील अंतर २ इंच असेल. तर उत्तरणीच्या मूळकारणाचा विचार केल्यानें असें दिसेल कीं ज्या मळसूत्राचें अंतर २ इंच आहे त्यापेक्षां ज्याच्या सूत्राचें अंतर १ इंच आहे त्यापासून तिप्पट फायदा होईल. या ठिकाणीं ए-

वढें लक्षांत ठेवावें कीं, ३ इंच सूत्रांतराच्या मळसूत्रास जितक्या वेळां फिरावें लागेल. त्याच्या तिप्पट वेळा १ इंच सूत्रांतराच्या मळसूत्रास त्याच स्थळांतून फिरावें लागेल. म्हणजे ज्या स्थळांतून गमन घडतें अथवा जो काळाचा तोटा होतो तो नफ्याशीं प्रमाणांत असतो. सारांश मळसूत्रांत शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण सूत्रांतर आणि उच्चालकाच्या फिरण्यानें जें वर्तुळ होतें त्याचा परिघ यांमधील प्रमाणाबरोबर असतें. म्हणजे शक्तीस जसें वजन तसेंच सूत्रांतरास उच्चालकाच्या फिरण्यानें झालेल्या वर्तुळाचा परिघ सूत्रांतर दर्शविण्यास अ आणि परीघ दर्शविण्यास प अशीं अक्षरें घेतलीं तर मळसूत्राची सर्व साधारण सारणी अशी होईल.

$$\frac{श}{व} = \frac{अ}{प}, \text{ किंवा } श \times प = व \times अ.$$

यां पैकीं कोणतीहीं तीन ठाऊक असलीं म्हणजे चवथें काढतां येतें. बहुतकरून उच्चालकाची लांबी दिलेली असते म्हणजे जो परिघ आम्हांस पाहिजे त्याची त्रिज्यां उच्चालकाची लांबी असते. या लांबीस २ प्रनें म्हणजे $\frac{४४}{७}$ नें गुणिलें म्हणजे परीघ समजतो.

(१७, ७) आतां उतरणीच्या मूलतत्वांवरून गणितरीत्या ही सारणी काढूं.

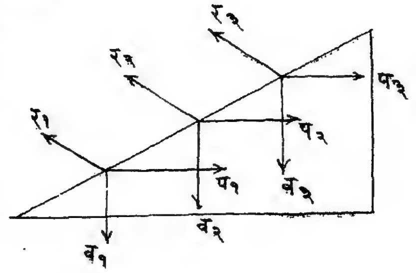
उतरणीवर वजन एका बिंदुस्थळीं असे व त्या स्थळीं त्यास समतोल ठेवण्यास कोणत्या प्रेरणांचीं कार्यें त्यावर होत होतीं एवढाच विचार करावा लागला. मळसूत्रांत वजन सूत्राच्या सर्व बिंदूंवर पसरलेलें असतें आणि त्या बिंदूंवर चाकीच्या रवांचे पासून प्रतिबंध होतो. तसेंच आंसाशीं लंब अशा उच्चालकानें जी प्रेरणा मळसूत्राच्या रूळास लावितों तिचें कार्य प्रत्येक बिंदू-

वर जें वजन पसरलेलें असतें त्यावर होतें व तेंही आंसाशीं लं-ब अशा दिशेंत होतें. सारांश प्रत्येक बिंदूवर जें वजन येतें त्या-वर तीन प्रेरणांचीं कार्यें होतात. मळसूत्र समतोल राहण्यास प्रे-रणा व वजन या मधील प्रमाण काढण्यास मळसूत्राच्या एका फेऱ्याच्या सर्व बिंदूविषयीं विचार केला पाहिजे. एक फेरा जर उ-लगडला तर एक उतरण होईल. मळसूत्रास एक फेरा मिळाला म्हणजे दोहों सूत्रांमधील अंतरा इतक्या अवकाशांतून वजन च-लन पावतें म्हणून सूत्राच्या प्रत्येक बिंदूवरील प्रेरणांचा विचारक-रणें होय.

समजा कीं, व वजन मळसूत्रावर ठेविलें आहे. त्याचें कार्य खालच्या बाजूच्या पृथ्वीच्या मध्याकडे होईल. हें वजन सूत्राच्या एका फेऱ्याच्या सर्व बिंदूंवर पसरून राहील. सर्वांची बेरीज व ब-रोबर असेल. निरनिराळ्या बिंदूवरील वजनें $व_१$, $व_२$, $व_३$, $व_४$ ...... $व_न$ कल्पिलीं, तर $व = व_१ + व_२ + व_३ + व_४$ ..... $व_न$ असेल. प्रेरणा आंसाशीं लंब अशा दिशेंत कार्य करितील. म्ह-णून ती दिशा आंसाशीं सूत्र जेवढा कोन करील तेवढाच कोन क-रील किंवा सूत्र पायाशीं जेवढा कोन करील तेवढाच कोन प्रेर-णेची दिशा करील. या प्रेरणेचें प्रत्येक बिंदूवर जें कार्य होईल, त्याची दिशा इच्या दिशेशीं समांतर असेल. म्हणजे ज्या प्रेरणे-च्या अंशाचें प्रत्येक बिंदूवर कार्य घडेल, त्या प्रत्येक प्रेरणेची दिशा ही पायाशीं तेवढाच कोन करील.

$प_१$, $प_२$, $प_३$ ... $प_न$ इत्यादि प्रेरणा प्रत्येक बिंदूवर कार्य करितात. चाकीचा एकंदर प्रतिबंध र आहे व प्रत्येक बिंदूवर $र_१$, $र_२$ $र_३$ ... $र_न$ इत्यादि प्रतिबंध आहेत. उतरणीचा कल ४ं आहे. अ-शा उतरणींत प्रत्येक प्रेरणा पायाशीं समांतर अशी कार्य क-रिते.

म्हणून क. १५६ प्रमाणें.



$$\frac{प_1}{व_1} = स्पर्शरे \cdot \theta$$

$$\frac{प_2}{व_2} = स्पर्शरे \cdot \theta$$

$$\frac{प_3}{व_3} = स्पर्शरे \cdot \theta$$

$$\frac{प_न}{व_न} = स्पर्शरे \cdot \theta$$

$$\frac{प_1 + प_2 + प_3 + \cdots प_न}{व_1 + व_2 + व_3 + \cdots व_न} = स्पर्शरे \cdot \theta \cdots (अ.)$$

$$व_1 + व_2 + व_3 + \cdots व_न = व \cdots\cdots (ब)$$

श शक्ति आणि $प_1$ $प_2$ $प_3$...... इत्यादि प्रेरणा यांचीं कार्ये समान आहेत किंवा श प्रेरणा $प_1$, $प_2$, $प_3$ इत्यादि प्रेरणांशीं समतोल आहे. म्हणून त्यांचीं भ्रामकलें बरोबर असलीं पाहिजेत. $प_1$, $प_2$, $प_3$ इत्यादि प्रेरणा मळसूत्राच्या रुळाच्या पृष्ठभागींच कार्य करितात. म्हणून आसापासून त्यांच्या कार्यदर्शक रेषावर लंब मळसूत्राच्या रुळाच्या त्रिज्येबरोबर होईल, ती त्रिज्या त आहे असें कल्पू आणि शक्ति ज्या उचालकानें कार्य करिते त्याची लांबी ल समजली तरः-

$$शल = त(प_1 + प_2 + प_3 \cdots\cdots + प_न)$$

$$\therefore प_1 + प_2 + प_3 + प_4 \cdots + प_न = \frac{शल}{त} \cdots (क)$$

(ब) आणि (क) यांतील यांतील किंमती (अ) यांत लिहून—

$$\frac{\frac{शल}{त}}{व} = स्पर्शरे \cdot \theta;\quad \frac{शल}{तव} = स्पर्शरे \cdot \theta.$$

$$\frac{श}{व} = \frac{त\cdot स्पर्शरे\cdot ७}{ल} \times \frac{२म}{२म} = \frac{२मत स्पर्शरे\cdot ७}{२मल}.$$

२ मत. स्प. ७ = कग. दोहों सूचांमधील अंतर (क. पहा.)

२ मल = श शक्तीनें ल लांबीच्या उच्चालकानें काढलेल्या वर्तुळाचा परीघ.

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{सूच्यांतर.}{लत्रिज्येच्या\ वर्तुळाचा\ परीघ} = \frac{अ}{प} \cdots (१)$$

तसेंच क. १४८ प्रमाणें.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{प_१}{र_१} = भु\cdot ७ \\ \frac{प_२}{र_२} = भु\cdot ७ \\ \frac{प_३}{र_३} = भु\cdot ७ \\ \frac{प_न}{र_न} = भु\cdot ७ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \therefore \frac{प_१+प_२+प_३+\cdots प_न}{र_१+र_२+र_३+\cdots\cdots र_न} = भु\cdot ७ \cdots (ड) \\ र_१+र_२+र_३ \cdots र_न = र \cdots (इ) \\ शल = त\,(प_१+प_२+प_३\cdots + प_न) \\ \therefore प_१+प_२+प_३\cdots+प_न = \frac{शल}{त} \cdots (फ) \end{array}$$

(इ) आणि (फ) यांतील किंमती (ड) यांत लिहून.

$$\frac{\frac{शल}{त}}{र} = भु\cdot ७. \qquad \therefore \frac{शल}{तर} = भु\ ७.$$

$$\frac{श}{र} = \frac{तभु७.}{ल.}$$

क. प्रमाणें— $भु\,७ = \frac{अ}{ल}$

$$\therefore \frac{श}{र} = \frac{त\times\frac{अ}{ल}}{ल} = \frac{अत}{लल} \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (२)$$

$$\frac{श}{व} = \frac{अ}{प}$$ यानें वरच्यास भागून.

$$\frac{व}{र} = \frac{प-अत}{अलल} = \frac{पत}{लल} \quad प = २ मल.$$

$$\therefore \frac{व}{र} = \frac{२मलत}{लल} = \frac{२मत}{ल} = \frac{\text{मळसूत्राचा परीघ}}{\text{मळसूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी}} \quad (३)$$

(२) हीच सारणी त्रिकोणमितीचा उपयोग केल्याशिवाय ही काढितां येते.

व, श, र, ल, अक्षरें पूर्वीप्रमाणें वजन, शक्ति, प्रतिबंध आणि उच्चालकाची लांबी दर्शविण्यास घेऊं. शिवाय आणखी मळसूत्राची त्रिज्या दर्शविण्यास त, मळसूत्राचा परिघ दर्शविण्यास **प**, उच्चालकाच्या फिरण्यानें केलेल्या वर्तुळाचा परिघ दर्शविण्यास प, सूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी दर्शविण्यास **ल** आणि सूत्रांतर दर्शविण्यास **अ** आणि वजनास तोलून धरण्यास सूत्राच्या पृष्ठभागावर पायाशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी प्रेरणा **श** घेऊं.

आतां सूत्राचा एक वेढा उघडल्यास जी उतरण होईल तिजवर **व** वजनास **श** प्रेरणा तोलून धरीत आहे म्हणून. क- **११६**, प्रमाणें.

$$\frac{श}{व} = \frac{उंची}{पाया}$$

येथें उतरणीची उंची म्हणजे सूत्रांतर, आणि उतरणीचा पाया म्हणजे मळसूत्राचा परीघ आहेत. $\therefore$

$$\frac{श}{व} = \frac{अ}{प} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (अ)$$

परंतु **श** प्रेरणा आणि **श** प्रेरणा परस्पर समतोल आहेत. म्हणून त्यांची मळसूत्राच्या आंसा भोंवतालचीं भ्रामकलें समान असलीं पाहिजेत. आंसापासून **श** आणि **श** या प्रेरणांच्या कार्यदर्शक रेषांवरील लंब त आणि **ल** च होतील.

$\therefore$ शंत = शल ; शं = $\frac{शल}{त}$

ही किंमत (अ) यांत लिहून.

$$\frac{\frac{शल}{त}}{व} = \frac{अ}{प}$$

$$\frac{श}{व} = \frac{अ}{\frac{ल}{त} \times प}$$

प हा त त्रिज्येच्या वर्तुळाचा परिघ आहे. त्रिज्या आणि परीघ यां मधील प्रमाण $\frac{४४}{७}$ हें २ प्रनें दर्शवितात. म्हणून प=२प्रत

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{अ}{\frac{ल}{त} \times २प्रत} = \frac{अ}{२प्रल} = \frac{अ}{प.} \quad \ldots \ldots (१)$$

तसेंच क. १४६ प्रमाणें.

$$\frac{शं}{र} = \frac{उंची}{लांबी}$$

उंची म्हणजे सूत्रांतर अ आणि उतरणीची लांबी म्हणजे मळसूत्राच्या एका वेढ्याची लांबी ल आहेत.

$$\therefore \frac{शं}{र} = \frac{अ}{ल} \quad परंतु \quad शं = \frac{शल.}{त.}$$

$$\frac{\frac{शल}{त}}{र} = \frac{अ}{ल}$$

$$\frac{शल}{रत} = \frac{अ}{ल}$$

$$\frac{श}{र} = \frac{अत}{लल} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (२)$$

$\frac{श}{व} = \frac{अ}{प}$ यानें वरच्यास भागून.

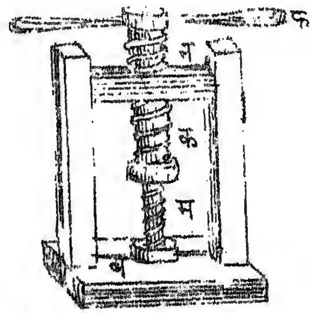
$$\frac{व}{र} = \frac{अपत}{अलल} = \frac{पत}{लल}.$$

प = २मल; आणि २मत = पं

$$\therefore \frac{व}{र} = \frac{त \times २मल}{ल \times लं} = \frac{२मत}{लं} = \frac{पं}{लं}.$$

(१५८) संयुक्त मळसूत्र— मळसूत्र फिरविण्यास लाविलेल्या उच्चालकाची लांबी हवी तितकी वाढवून किंवा सूत्रांतर हवें तितकें कमी करून मळसूत्राचें सामर्थ्य हवें तितकें वाढवितां येईल, असें वरील विवेचनावरून सिद्ध आहे. या दोन रीतिनीं यांत्रिकसामर्थ्य वाढविण्यास जरी शास्त्ररीत्या मर्यादा नाहीं तरी व्यवहारांत उच्चालकाची लांबी फार वाढविल्यानें व सूत्रांतर कमी केल्यानें फार अडचणी येतात.कारण उच्चालकाची लांबी वाढविल्यानें त्याचें टोंक फिरण्यास जें स्थळ पाहिजे तें मोठें लागतें व यंत्रास अवजडपणा येतो. सूत्रांतर फार कमी करण्यास सूत्रही फारबारीक धरावें लागेल, वतेणें करून त्याच्या आंगीं इच्छिलें वजन धरण्याचें सामर्थ्य राहणार नाहीं. या दोन्ही अडचणी नयेतां मळसूत्राची शक्ति वाढावी या हेतूनें संयुक्त चाक व कणा या यंत्राप्रमाणें दोन मळसूत्राचें एक संयुक्तमळसूत्र **हंटर** यानें शोधून काढिलें आहे. यांत दोन मळसूत्रें असतात. लहान मळसूत्र थोरल्याच्या आंत फिरतें. थोर मळसूत्र चाकीमधून उच्चालकानेंच फिरतें; परंतु तें कशावर दाबीत नसून त्याचें कार्य धाकट्या मळसूत्रावर होतें. थोरल्या मळसूत्राचा दांडा पोकळ असून त्या पोकळींत धाकट्या मळसूत्राचीं सूत्रें बरोबर बसण्या जोग्या खांचा पाडलेल्या असतात. थोरल्या मळसूत्राच्या सूत्रांतरापेक्षां धाकट्याचें सूत्रांतर कमी असतें. धाकटें वाटोळें फिरतनसून तें एका फळीस पक्के बसविलेलें असतें. यामुळें तें फक्त वर खालीं सरतें व तेणें करून त्याणें जास्तकमी दाब पाडितां येतो. थोरलें मळसूत्र त्याच्या सूत्रांतरा इतकें खालीं येतें व धाकटें त्याच्या सूत्रांतरा इतकें वर चढतें. आणि दोहोंच्या अंतरा इतक्या अवकाशांतून लहान मळसूत्र खालीं उतरून दाब उत्पन्न होतो. या प्रमाणें फार

बारीक सूत्राच्या मळसूत्रा इतका दाब पाडितां येतो. खालील आकृती वरून वरील गोष्टी चांगल्या लक्षांत येतील.



क हें मोठें मळसूत्र न या स्थिर चाकींत फिरत आहे. याचा दांडा पोकळ असून दुसऱ्या लहान मळसूत्रास चाकी प्रमाणें उपयोगी पडतो. पाकळींतील सूत्रें म मळसूत्राच्या सूत्राशीं मिळती असतात. भार घालण्याची ब फळी खालीं वर होत्ये. व तीस हें धाकटें मळसूत्र घट्ट बसविलेलें आहे. क मळसूत्र फ या उच्चालकानें फिरवितां येतें. एका फेऱ्यानें क पोकळ मळसूत्र आपल्या जवळ जवळच्या दोन सूत्रां मधील अंतरा इतक्या स्थळांतून खालीं जातें व त्या बरोबर दुसरें धाकटें म भरींव मळसूत्र आपल्या सूत्रांतरा इतक्या स्थळांतून वर चढतें. या मुळें ब फळी व तीस लाविलेले म मळसूत्र ही दोन्ही दोहों मळसूत्राच्या सूत्रांतरा इतक्या स्थळांतून खालीं जातात. ही परिणाम उभयतांच्या एकत्र व्यापारापासून घडतो. जर म मळसूत्र नसून एक साधा दांडा कच्या पोंकळींत बसविलेला असता तर क मळसूत्र खालीं येतांच तितका तो दांडाही खालीं आला असता व या सूत्रांतराच्या मानानेंच काय तो फायदा झाला असता. दोघांचीं सूत्रें सारखीं असतील तर एक खालीं येईल तितकें दुसरें वर चढेल, आणि ब फळी आपल्या ठिकाणींच राहील. परंतु जर मोठ्या क मळसूत्राच्या सूत्रांतील अंतरापेक्षां धाकट्या म मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर कमी असेल, तर क आणि म यांच्या सूत्रांतरांच्या अंतरा इतक्या स्थळांतून फ उच्चालकाच्या एका फेऱ्यानें ब फळी खालीं जाईल. यावरून ज्या साध्या मळ-

सूत्राचें सूत्रांतर या दोन मळसूत्रांच्या सूत्रांतराच्या वजाबाकी बरोबर आहे, त्या मळसूत्राच्या फळाबरोबर या जोड मळसूत्राचें फळ होतें. म्हणून दोन मळसूत्रांच्या सूत्रांतरांची वजाबाकी कमी केल्यानें यांत्रिकस्वार्थ वाढेल. म्हणजे दोन मळसूत्राच्या सूत्रांतील अंतराच्या वजाबाकीस जसा **फ** स्थळींचा फिरण्याचा परीघ, तसें शक्तीस वजन, असें प्रमाण असेल. जर उच्चालकाची लांबी **ल** आणि यांच्या फिरण्यानें झालेल्या वर्तुळाचा परीघ **प** कल्पिलें, आणि दोहोंचीं सूत्रांतरें अ आणि अ' कल्पिलीं तर संयुक्त मळसूत्राच्या समतोलत्वाची सारणी अशी होईल.

$$\frac{श}{व} = \frac{अ-अ'}{२प्रल} = \frac{अ-अ'}{प.}$$

(१७,१) हीच सारणी गणितरीत्याही काढितां येते.

फ उच्चालकाच्या टोंकाशीं **श** शक्ति लाविली आहे. व तिणें **व** वजन किंवा प्रतिबंध सहन केला आहे.

श शक्तीनें दोन्हीं मळसूत्रें फिरत आहेत, परंतु तीं परस्पर उलट दिशेनें फिरताहेत. **श** शक्तीचे दोन अवयव जे दोहों मळसूत्रांच्या पृष्ठभागावर म्हणजे परिघांवर कार्य करीत आहेत ते **क्ष** आणि **य** आहेत, असें समजू. आतां जर **फ** उच्चालकाची लांबी **ल** असेल आणि दोहों मळसूत्रांच्या त्रिज्या अनुक्रमें त व त' असतील, तर आंसापासून **श**, **क्ष**, **य** या प्रेरणांच्या दिशांवर काढलेले लंब तेच ल, त, त' होतील, श ही **क्ष** व **य** यांची परिणामी प्रेरणा आहे. **क्ष** व **य** यांची मळसूत्राच्या आंसा भोंवतालचीं भ्रामकत्वें परस्पर विरुद्ध असतील ∴ (क. ६२ प्रमाणें)

$$शल = क्षत - यत' \quad \dots \dots \quad (१)$$

व वजन थोरल्या मळसूत्रावर कार्य करणाऱ्या शक्तीच्या **क्ष** या अवयवानें तोलून धरिलें आहे. जर या मळसूत्राचें सू-

त्रांतर अ असेल आणि त्रिज्या व परिघ यांमधील प्रमाण २प्र कल्पिलें तर (क. १५७ प्रमाणें)

$$\text{क्ष} = \frac{\text{व अ}}{\text{२प्रन}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (२)$$

तसेंच व वजन दुसऱ्या मळसूत्रावरील शक्तीच्या य अवयवानें ही तोलून धरिलें आहे. जर याचें सूत्रांतर अ' असेल तर

$$\text{य} = \frac{\text{व अ'}}{\text{२प्रन}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (३)$$

(२) व (३) या समीकरणांतील किमती (१) यांत लिहून-

$$\text{शल} = \frac{\text{वअ}}{\text{२प्रन}} \text{न} - \frac{\text{वअ'}}{\text{२प्रन}} \text{न} = \frac{\text{वअ}}{\text{२प्र}} - \frac{\text{वअ'}}{\text{२प्र}}$$

$$\therefore \quad \text{शल} = \frac{\text{व}(\text{अ} - \text{अ'})}{\text{२प्र}}$$

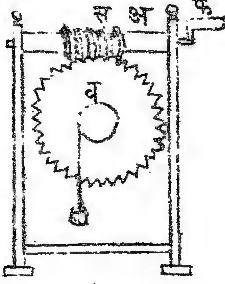
$$\therefore \quad \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ} - \text{अ'}}{\text{२प्रल}} = \frac{\text{अ} - \text{अ'}}{\text{प}}$$

म्हणजे शक्ति आणि वजन यांतील प्रमाण दोहोंच्या सूत्रांतरांची बजाबाकी आणि उच्चालकाच्या फिरण्यानें झालेल्या वर्तुलाचा परिघ यांच्या प्रमाणाबरोबर असतें.

---

(१६०) अनंत मळसूत्र— चाकीस पुढें मागें लोटण्याकरितां मळसूत्राची योजना नसून कधीं कधीं त्याची योजना चाकाच्या दात्यांवर केलेली असते, व तेणें करून त्याचा व्यापार चाकावर अमर्याद कालपर्यंत चालतो. म्हणून या मळसूत्रास **अनंत मळसूत्र** म्हणतात. यांत मळसूत्र व दात्यांचें चाक या दोन मूळ यंत्रांचा संयोग असतो. याचें दिग्दर्शन मागें चाकाच्या प्रकरणांत ही केलें आहे.

आडव्या अ दांड्यावर स मळसूत्र आहे, व तें व चाकाच्या दात्यांत लागू केलें आहे. फ हा त्यास फिरविण्याचा दांडा आहे. त्यास शक्ति लावितां येते. मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर चाकावरील कोणत्याही दोन दात्यांमधील अंतराबरोबर असतें व मळसूत्राचें सूत्र दात्यांच्या खांच्यांत बरोबर बसतें. यामुळें मळसूत्रास एक फेरा दिला म्हणजे चाक दोन दात्यांमधील अंतरा इतक्या स्थळांतून पुढें जातें. चाकावर २७ दांत्ये असल्यास साऱ्या चाकास १ फेरा देण्यास मळसूत्र २७ वेळ फिरवावें लागेल. चाकाच्या कण्यावर वजन लाविलेलें असतें किंवा त्यानें दुसरें चाक फिरतें. या यंत्रानें यांत्रिकस्वार्थ कसा होतो तें खालीं दाखविलें आहे.



(१६१) या यंत्रांतील यांत्रिकस्वार्थ गणितरीत्या असा काढितां येतो.

फ उचालकाची लांबी ल आहे व त्यास श शक्ति लाविली आहे. अ हें मळसूत्राच्या सूत्रांमधील अंतर आहे. या मळसूत्रानें चाकाच्या दात्यांवर जो दाब उत्पन्न होतो तो द आहे असें घेऊं. या द दाबानें चाकाच्या कण्यावरील व वजन तोलून धरिलें आहे. चाक व कणा यांच्या त्रिज्या अनुक्रमें त व तं आहेत असें कल्पू-तर

(क. १२१ प्रमाणें) $\frac{श}{द} = \frac{अ}{२मल}$

(क. १२१ प्रमाणें) $\frac{द}{व} = \frac{तं}{त}$

या दोहों समीकरणाचा गुणाकार करून.

$$\frac{श}{द} \times \frac{द}{व} = \frac{श}{व} = \frac{अ \times ते}{२मल \times त}$$

या वरून शक्ति व वजन यांमधील प्रमाण सूत्रांतर आणि कण्याची त्रिज्या यांचा गुणाकार आणि उच्चालकाच्या फिरण्यानें झालेल्या वर्तुळाचा परीघ आणि चाकाची त्रिज्या यांचा गुणाकार यांच्या प्रमाणाबरोबर असतें. म्हणजे सूत्रांतर आणि कणा हीं दोन्ही लहान करून किंवा उच्चालकाची लांबी व चाकाची त्रिज्या हीं दोन्हीं मोठीं करून यांत्रिकस्वार्थ वाढवितां येईल.

चाकावरील दांत्यांची संख्या न असें कल्पू. चाकाच्या दांत्यांमधील अंतर मळसूत्राच्या सूत्रामधील अंतरा इतकेंच असतें. सूत्रांतर अ घेतलें आहे. या अंतरास दांत्यांच्या न संख्येनें गुणिलें म्हणजे चाकाच्या परिघाची लांबी निघेल आणि चाकाची त्रिज्या त आहे. तीस २म यानें गुणिलें म्हणजे ही चाकाचा परीघ निघतो.

$$\therefore न अ = २ मत. \quad \therefore अ = \frac{२मत.}{न.}$$

ही अ ची किंमत वरच्या सारणींत लिहून.

$$\frac{श}{व} = \frac{\frac{२मत}{न} \times ते}{२मल \times त} = \frac{२म \cdot त \cdot ते}{२मल \cdot त \cdot न}$$

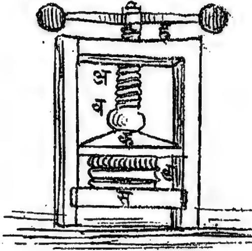
$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{ते}{नल.}$$

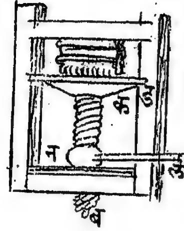
म्हणजे शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण कण्याची त्रिज्या आणि दांत्यांची संख्या व उच्चालकाची लांबी यांचा गुणाकार यांच्या प्रमाणाबरोबर असतें.

(१६२) मळसूत्राचे व्यावहारिक उपयोग—

मळसूत्राचे व्यवहारांत अगणित उपयोग होतात. हवा तितका

भार उत्पन्न करून त्याची क्रिया सारखी चालावी व तो भार तसाच राहावा याविषयीं तर मळसूत्राशिवाय दुसरें साधन नाहीं. मळसूत्राची स्थिर चापणी खालील आकृतींत दाखविली





आहे. या चापणीनें बुकें बांधणारे बुकें दाबतात. एका भक्कम चौकटीच्या खालच्या बाजूस ख फळी बसविलेली आहे. तिच्या वरच्या आडव्या ह लांकडांत मळसूत्राची चाकी आहे. मळसूत्राच्या तळास क फळी पक्की बसविलेली आहे. ख फळीवर बुकें ठेवून उच्चालकानें मळसूत्र फिरविलें म्हणजे क फळी खालीं येऊन भार पडतो व बुकें दाबलीं जातात. उच्चालकास उलटें फिरविलें म्हणजे क फळी वर जाऊन भार नाहींसा होतो. यांत ह लाकूड स्थिर असल्यानें मळसूत्राची चाकी स्थिर आहे. व मळसूत्र खालवर होतें.

दुसरें दाबण्याचें यंत्र वर दाखविलें आहे त्यांत मळसूत्र वाटोळें फिरत नसून फक्त खालवर जातें. व त्याप्रमाणें त्यास वरच्या आंगास लाविलेली ड फळी खालवर होऊन दाब पडतो आणि न चाकी ल उच्चालकानें वाटोळी मात्र फिरत्ये परंतु तिचें स्थलांतर होत नाहीं. असल्या यंत्रानें कापसाचे, कापडाचे वगैरे गठ्ठे दाबतात. अर्क, रस, व तेलें काढतात. धातूच्या पत्र्यावर छाप उठवितात. सर्व छापण्याच्या कामांत मळसूत्राचा उपयोग करितात. उसाचा रस काढण्याचा मळसूत्राचा चरक अ-

सतो. दोन तुकडे नेहमी जोडण्यास मळसूत्राचा उपयोग करितात. गोप, तोडे, वांकी, मोरवळ्या बुगड्या वगैरे दागिन्यांचीं टोंकें मळसूत्रानींच जोडतात. कागदाच्या प्रति काढण्यास व कागदावर व पाकिटावर ठशाचे छाप उठविण्यास मळसूत्रच घेतात. सुताराचें भोंकें पाडण्याचें **गिरमिट** मळसूत्राचेंच उदाहरण आहे. मळसूत्रानें फार लहान अंतरें मापितां येतात व त्या अंतराचे आणखीही विभाग करितां येतात. मळसूत्रानें एका इंचाचे ५,००० किंवा जास्त भाग होतात. अशा मळसूत्रास सूक्ष्म मापक मळसूत्र (मायक्रामिटर स्क्रू) म्हणतात व याचा उपयोग जोतिषी, गणिती, इंजिनिअर यांस फार होतो. सृष्टिशास्त्रांतील जेवढीं म्हणून यंत्रें आहेत त्या सर्वांत मळसूत्राचा फार उपयोग केलेला असतो. बुचें काढण्याचें मळसूत्र हें केवळ मळसूत्राचें सूत्र आहे. सूत्र ज्या दांड्या भोंवती गुंडाळिलें असतें तो दांडा यांत नसतो आणि प्रतिबंध दूर करावा याकरितां याचा उपयोग करीत नाहींत. याणें मऊ बुचांत शिरून त्यास बळकट धरावें एवढाच याचा उपयोग असतो.

उदाहरणें.

(१) मळसूत्र ज्या रूळावर आहे, त्याचा व्यास २ इंच आहे, सूत्रांतर $\frac{१}{४}$ इंच आहे, तर त्यांत शक्ति व वजन यांमध्यें प्रमाण काय असेल?

उ. $\frac{श}{व} = \frac{७}{१७६}$

(२) एका मळसूत्राच्या दाबणींत मळसूत्राचा व्यास २ इंच, मळसूत्राचें सूत्रांतर $\frac{१}{८}$ इंच आणि शक्ति लावण्याच्या उचाल्काची लांबी २ फूट आहे. तर १ शेराच्या शक्तीनें किती शेरांचा दाब पडेल?

उ. १०५ $\frac{१}{३}$ शेर.

(३) साध्या मळसूत्राचा उच्चालक २ फूट आहे. सूत्राची जाडी किंवा सूत्रांतर $\frac{१}{५}$ फूट आहे. तर १०० शेरांची शक्ति उच्चालकास लाविल्यास किती शेरांचा दाब पडूं शकेल.

उ. ६,२८३ शेर.

(४) संयुक्त मळसूत्रांत उच्चालकाची लांबी १ $\frac{१}{२}$ फूट आहे. थोरल्या मळसूत्राचें सूत्रांतर $\frac{३}{४}$ इंच, आणि धाकट्याचें $\frac{१}{२}$ इंच आहे. जर ३० शेरांची शक्ति उच्चालकास लाविली तर दाबण्याच्या फळीवर किती शेरांचा दाब पडेल?

उ. १३५७१ $\frac{१}{२}$ शेर.

(५) उच्चालकाची लांबी २ फूट, मोठ्या मळसूत्राचें सूत्रांतर १ इंच असेल, तर संयुक्त मळसूत्रांत एक पौंडाच्या शक्तीनें $\frac{१}{६}$ दाब पडण्यास धाकट्या मळसूत्राचें सूत्रांतर किती असावें.

उ. ७२ इंच.

(६) अनंत मळसूत्रांत उच्चालकाची लांबी १०४ फूट आहे. चाकाच्या परिधावर दात्यांची संख्या ३० आहे. चाकाच्या कण्याची त्रिज्या २ फूट आहे, तर उच्चालकास एक शेराची प्रेरणा लाविल्यास किती शेरांचें वजन उचलतां येईल.

उ. २१० शेर.

(७) वरील उदाहरणांत २८० शेरांचें वजन उचललें जाण्यास चाकाच्या परिधावर दात्यांची संख्या काय असली पाहिजे?

उ. ४०

(८) एका १ $\frac{५}{८}$ इंच उंचीच्या रूळावर मळसूत्राचे ११ फेरे आहेत. आणि जर याच्या १ $\frac{५}{१२}$ फूट लांबीच्या उच्चालकास २ हंड्रेडवेट, १ कार्टर, १७ पौंड इतकी शक्ति लाविली, तर अशा मळसूत्रापासून किती दाब उत्पन्न होईल.

उ. १४१ १/१० टन.

(९) मळसूत्राचें सूत्रांतर १/६ इंच आहे. मळसूत्राच्या रुळाचा व्यास १ इंच आहे. आणि शक्ति १२१ शेरांची लाविलेली आहे, व हिच्या फिरण्यानें ३ फूट परीघाचें वर्तूळ होतें. तर मळसूत्राच्या सुत्रा-वर किती दाब पडेल.

उ. ३०,०६६ शेर.

(१० सूत्रांतर ३/४ इंच आहे. मळसूत्राच्या ळाचा व्यास ५/८ इंच आहे तर सुत्राच्या एका फेऱ्याची लांबी काढ?

उ. ७.१ इंच.

(११) शक्ति उच्चालकाच्या ज्या टोंकास लाविली आहे, तें टोंक फिरल्यानें जें वर्तुळ होतें. त्याचा परीघ ६ फूट आहे. तर शक्तीच्या १४४ पट वजन उचललें जाण्यास २ फूट उंचीच्या रुळावर मळसूत्रा-चे किती वेढे झाले पाहिजेत?

उ. ४८ वेढे.

(१२) मळसूत्राचा कोन ३० अंशांचा आहे. आणि उच्चालकाची लां-बी मळसूत्राच्या रुळाच्या त्रिज्येच्या न पट आहे तर अशा मळ-सूत्रापासून यांत्रिकस्वार्थ किती प्राप्त होईल.

उ. न√३

(१२) उच्चालकाची लांबी १५ इंच असल्यास यांत्रिकस्वार्थ ३० मिळण्यास सूत्रांतर किती असावें?

उ. २२/७ इंच.

(१४) अनंत मळसूत्रानें एक वजन उचललें आहे, व त्याचा यां-त्रिकस्वार्थ स आहे, तर असें दाखवीव कीं, वजन जितक्या अवकाशां-तून चढेल त्याच्या स पट अवकाशांतून शक्तीस फिरावें लागेल.

प्रकरण १३

घर्षण.

(१६३) हा वेळ पावेतों ज्या पदार्थांवर प्रेरणांचें कार्य होत होतें ते सर्व पदार्थ अगदीं साफ व गुळगुळीत असे कल्पिले होते. परंतु वास्तविक तसा प्रकार नसून हरएक पदार्थ जास्त कमी खरबरीत असतात. पदार्थांच्या पृष्ठभागावर उंचवटे असतात. पदार्थ कितीही गुळगुळीत दिसला तरी तो कांहींना कांहीं खरबरीत असतो. आणि एकापदार्थाच्या पृष्ठभागावरून दुसरा पदार्थचलन पावला म्हणजे या उंचवट्यांपासून चलनास प्रतिबंध होतो. व या प्रतिबंधामुळें प्रेरणेच्या कार्यांत सूट द्यावी लागते. यास्तव घर्षणाच्या परिणामाचा विचार याप्रकरणांत केला आहे.

एका पदार्थाच्या सपाटीवरून दुसऱ्या पदार्थाच्या सपाटीच्या चलनास प्रतिबंध होणार नाहीं तर त्या दोहों पदार्थांच्या पृष्ठभागांस गुळगुळीत असें म्हणतात. आणि जेव्हां त्यांपासून चलनास प्रतिबंध होईल, तेव्हां त्यांस **खरबरीत** असें म्हणतात.

घर्षण– जेव्हा एका पृष्ठभागावरून दुसऱ्या पृष्ठभागास ओढीत असतां किंवा तो चलन पावत असतां जो प्रतिबंध होतो त्यास घर्षण असें म्हणतात. कारण एकाचे उंचवटे दुसऱ्याच्या खाड्यांत शिरून चलनास प्रतिबंध होतो.

घर्षण ही प्रतिबंधक शक्ति आहे. हिच्यानें गति देववत नाहीं. पण गतिविशिष्ट पदार्थांच्या गतीचा ती नाश करूं शकते. म्हणून जेव्हां पदार्थ प्रत्यक्ष चलन पावतो, किंवा त्याचा चलन पावण्याचा कल असतो, तेव्हां मात्र या शक्तीचें कार्य घडतें; म्हणजे जेव्हां पदार्थांवर कार्य करणाऱ्या दुसऱ्या प्रेरणा समतोल नसतात, तेव्हां मा-

त्र घर्षणशक्तीचें कार्य घडतें तसेंच ही प्रतिबंधक शक्ति असल्यानें ज्या दिशेस पदार्थाचें चलन होत असेल. किंवा होणार असेल, त्या-च्या उलट दिशेस घर्षणाचें कार्य घडतें. यास्तव कोणत्याही यंत्रांत त्यास समतोल ठेवण्यास जितकी शक्ति पाहिजे त्याहून जास्त शक्ती-चें कार्य होत असेल तर वजनास शक्ति ओढील, म्हणून शक्ती च्या विरुद्ध आणि वजनाशीं सरूप असें घर्षणाचें कार्य घडेल. परंतु-शक्ती कमी असेल तर तिच्याशीं सरूप असें घर्षणाचें कार्य घडेल. जास्त वजनास कमी शक्तीनें तोलून धरवेल. परंतु त्या वजनास गति दे-ण्यास त्याहून जास्त जोराची शक्ति लागेल हें उघड आहे.

अनेक प्रयोगांवरून घर्षणाविषयींचे खालीं लिहिलेले नियम ठरविलेले आहेत.

(१) **घर्षण काळानें वाढतें**— जेव्हां दोन पदार्थ गति विशि-ष्ट असतील तेव्हां त्यांस तसेंच फिरत ठेवण्यास जितकी शक्ति ला-गेल, त्यापेक्षां, जेव्हां दोन पदार्थ परस्पर संनिधपण स्थिर असे कां-हीं काळपर्यंत असतात, तेव्हां एकास दुसऱ्यावर सरकविण्यास जा-स्त शक्ति लागते. उदाहरणार्थ दोन ओकच्या लांकडाचे पृष्ठभाग कां-हीं मिनिटें पर्यंत एकत्र राहिल्यावर एकावर दुसऱ्यास सरकविण्या-स जो जोर लागतो, तो, आणि तेच तुकडे गतिविशिष्ट असतां त्यांस सरत ठेवण्यास जो जोर लागतो, यांमधील प्रमाण ६२ : ४८ असें अ-सतें. तसेंच ओक लांकडाच्या पृष्ठभागावरून लोखंडाचा पृष्ठभाग स-रकविला, तेव्हां या दोहों शक्तींमधील प्रमाण ६५ : २६ असें होतें. घर्षणाचा जोर वाढण्यास जो काळ लागतो तो निरनिराळ्या पदार्थांत नि-रनिराळ्या मानानें लागतो. दोन्ही पृष्ठभाग लांकडाचेच असतील, त-र ते दोन किंवा तीन मिनिटें संनिध राहतांच त्यांमध्यें अत्यंत घर्षण उत्पन्न होतें. परंतु धातूचे पृष्ठभाग बहुतेक एकत्र होतांच घर्षण प-रमावधीचें उत्पन्न होतें. परंतु लांकूड लोखंडावर ठेविलें तर कित्येक

दिवसांनीं घर्षणशक्ति परमावधीची होते.

(२) जेव्हां परस्पर संनिध असणारे पृष्ठभाग एकाच द्रव्याचे असतात तेव्हां त्यांमधील घर्षणशक्ति त्यांच्या दाबाच्या प्रमाणांत असते. संन्निध असलेल्या पृष्ठभागांच्या स्थितीवर घर्षणशक्ति अवलंबून असते:- जसें त्याचे तंतु परस्पर समांतर असतील किंवा एकमेकांशीं काटकोन करीत असतील, किंवा ते कोरडे असतील अगर स्निग्ध पदार्थ लाऊन तुळतुळीत केलेले असतील, त्याप्रमाणें घर्षणाचा जोर भिन्न भिन्न असेल. परंतु संनिध असलेल्या पृष्ठभागांच्या स्थितींत कांहीं फेरफार केला नाहीं, तर जसजसा दाब बदलावा त्याप्रमाणें घर्षणाचा जोरही त्या मानानें बदलतो आणि घर्षण व दाब यांमधील प्रमाण जोंपर्यंत पदार्थ एकाच द्रव्याचे असतात तोंपर्यंत कायम राहतें. घर्षण आणि दाब यामधील जेंहें कायमचें प्रमाण त्यास च **घर्षणगुणक** असें म्हणतात.

(३) दोन सनिध असलेल्या पदार्थांच्या सपाट्यांच्या विस्तारावर घर्षण अवलंबून असत नाहीं. उदाहरणार्थ असें समजूं कीं, चार चौरस इंच क्षेत्राचा व चार शेर वजनाचा लांकडी पत्रा एका दगडाच्या पृष्ठभागावर ठेविला आहे. आतां जर आम्हीं असें कल्पिलें कीं, एक चौरस इंचाचा एक असे त्याचे चार तुकडे कापून वेगळे वेगळे ठेविले तर एकेक चौरस इंच तुकड्याचें घर्षण सर्व पत्र्याच्या ¼ घडेल. परंतु जर एका पत्र्यावर बाकी तीन पत्रे एकावर एक असे ठेविले, तर दाब चौपट वाढेल, व त्या प्रमाणें घर्षणही चौपट वाढेल म्हणजे मूळच्या पृष्ठभागा इतकेंच घर्षण होईल सारांश एका चौरस इंचावर चौपट वजन ठेविल्यानें जें घर्षण होतें. तेंच चार चौरस इंचांवर तेवढेंच वजन ठेविल्यानें घर्षण होतें.

हा नियम सर्वव्यापक आहे, असें नाहीं. जेव्हां पृष्ठभाग अति मोठे किंवा अति लहान असतात, तेव्हां हा नियम लागू पडत ना-

ही. जेव्हां दोन पृष्ठभाग एका रेषेंतच मात्र परस्परांस स्पर्श करितात, तेव्हां कांहीं क्षेत्राचे पृष्ठभाग स्पर्श करीत असल्यापेक्षां घर्षण कमी घडतें. फार मोठे पृष्ठभाग असल्यानें घर्षण वाढतें. तसेंच कापडासारख्या तंतुमय पदार्थांत घर्षण पृष्ठभागाप्रमाणें वाढतें, आणि दाबाप्रमाणें कमी होतें; आणि धातू, दगड, लांकूड इत्यादि कठीण पदार्थांस मात्र वरचा नियम लागू होतो. म्हणजे त्यांमधील घर्षण केवळ दाबाप्रमाणें वाढतें.

(१६४) घर्षणगुणक— जर दोन संनिध असलेल्या पृष्ठभागामधील दाब र असला आणि एक पृष्ठभाग दुसऱ्यावरून सरकू लागण्यास पृष्ठभागांच्या खरबरीतपणामुळें जें घर्षण घडतें किंवा जो प्रतिबंध होतो तो घ अक्षरानें दर्शविला तर दाब आणि घर्षण यांमधील प्रमाण $\frac{घ}{र}$ यास **घर्षणगुणक** म्हणतात. हा गुणक विवक्षित पदार्थांचा नेहमी कायमचा असतो. पहिल्या नियमाप्रमाणें घर्षण दाबाप्रमाणें बदलतें. तें पृष्ठभाग लहान मोठे झाल्यानें बदलत नसून केवळ पृष्ठभागांच्या द्रव्यांवर अवलंबून असतें. घर्षणगुणक दर्शविण्यास ग अक्षर घेतलें तरः—

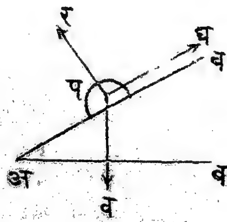
$$\frac{घ}{र} = ग, \quad \therefore घ = गर.$$

घर्षणगुणक हा विवक्षित पदार्थाचा कायमचा असतो. परंतु निरनिराळ्या पदार्थांचा निरनिराळा असतो व तो प्रत्यक्ष प्रयोगानें काढावा लागतो. गुणक समजण्यास घर्षण समजावें लागतें तें कसें काढितां येतें तें खालीं सांगितलें आहे.

दोन पदार्थांच्या पृष्ठभागांत परस्पर घर्षण किती घडतें हें फार सुलभरीतीनें काढतां येतें. जर एखादा पदार्थ सपाट पातळीवर स्थिरठेविला, तर घर्षण शक्तीचा व्यापार घडत नाहीं. परंतु पातळीवरून पदार्थास सरकवूं लागलों तर पदार्थाच्या गतीस दोहोंच्या खरबरीत

पृष्ठभागांपासून प्रतिबंध घडतो. यामुळें हा प्रतिबंध काढण्याकरितां पृष्ठभागावर पदार्थ स्थिर असतां सपाटीपासून पृष्ठभाग वर उचलतात. येणेंकरून गुरुत्वाकर्षणानें पदार्थ खालीं सरकूं लागतो. आणि घर्षणापासून त्यास प्रतिबंध होत असतो; आणि जेव्हां घर्षणाच्या प्रतिबंधापेक्षां त्याचा खालीं जाण्याचा जोर जास्त होतो, तेव्हां पदार्थ खालीं सरकूं लागतो. म्हणून पदार्थ खालीं सरकूं लागेपर्यंत, म्हणजे खालीं सरकण्याच्या त्याच्या अंगीं कल येईपर्यंत पृष्ठभाग सपाटीपासून वर उचलून हा घर्षणाचा प्रतिबंध मापितां येतो.

(१६७) **विसाव्याचा कोन** समजा कीं, व वजनाचा पदार्थ **अब** या सपाट पातळीवर आहे. पदार्थ स्थिर असतां घर्षणाचा व्यापार घडत नाहीं. आतां **अब** पातळीचें **अ** टोंक सपाटीवर टेकून दुसरें **ब** टोंक वर थोडथोडें उचलीत गेलें, तर पृष्ठभाग अगदीं गुळगुळीत असल्यास यत्किंचित उचलतांच पदार्थ खालीं सरकूं लागेल; परंतु **अब** पातळी व तिजवरील पदार्थ यांच्या खरबरीत पणामुळें पदार्थाच्या खालीं सरकण्यास प्रतिबंध होतो, आणि पातळी थोडीशी वर उचलल्यानें पदार्थ खालीं सरत नाहीं. जरी गुरुत्वाकर्षणानें पदार्थाच्या अंगीं खालीं सरण्याचें सामर्थ्य येतें, तरी घर्षणाचा प्रतिबंध त्यास खालीं जाऊं देत नाहीं. याप्रमाणें **अब** पातळीचें **ब** टोंक अधिकाधिक उचलीत गेलें म्हणजे **अब** पातळीनें क्षितिज सपाटीशीं विवक्षित अंशाचा कोन केला कीं, पदार्थ खालीं सरूं लागतो. या कोनाच्या आंत कितीही पातळी चढविली तरी पदार्थ स्थिर राहतो. यास्तव या मर्यादेच्या कोनास **विसाव्याचा कोन** असें म्हणतात. कारण या मर्यादेच्या आंत सर्व स्थितींत पदार्थास विसावा मि-



कतो किंवा तो घर्षणाच्या प्रतिबंधानें स्थिर राहतो. या विसाव्याच्या कोनाइतकी पातळी उचली पर्यंत घर्षण पदार्थास समतोल धरितें म्हणून एवढ्या कलाच्या साफ गुळगुळीत उतरणीवर व वजनाच्या पदार्थास समतोल धरण्यास जेवढी शक्ति लागेल, तेवढा घर्षणाचा प्रतिबंध असतो.

असें समजूं कीं अब पातळी ए चे कोनांतून चढविल्या बरोबर प पदार्थ सरकूं लागण्याच्या स्थितींत येतो, म्हणजे समतोल राहण्याची त्याची मर्यादा होते, अशा स्थितींत पदार्थावर त्याचें व वजन अब पायाशीं लंब अशा पब या दिक्‌रेषेंत कार्य करितें अबं उतरणीचा र प्रतिबंध अबं उतरणीच्या सपाटीशीं लंब अशा पर दिशेंत कार्य करितो. आणि घ घर्षण अबं उतरणीशी समांतर अशा पघ दिशेनें कार्य करितें आणि या तीन प्रेरणांनीं प पदार्थ समतोल आहे. यास्तव उतरणीच्या नियमा प्रमाणें (कलम १४५ पहा.)

$$\frac{घ}{व} = \frac{बबं}{अबं} = भु\cdot ए. \quad \cdots \quad \cdots (१)$$

$$\frac{र}{व} = \frac{अब}{अबं} = को\cdot भु\cdot ए. \quad \cdots \quad \cdots (२)$$

(१) यास (२) यानें भागून.

$$\frac{घ}{र} = \frac{बबं}{अब} = स्पर्शरे\cdot ए.$$

$$\therefore घ = र\cdot स्पर्शरे\cdot ए$$

$$किंवा \quad घ = व\cdot भु\cdot ए.$$

$\frac{घ}{र}$ यास घर्षणाचा गुणक म्हणतात, व तो नेहमी विसाव्याच्या कोनाच्या स्पर्शरेषेबरोबर असतो असें सिद्ध झालें. हा गुणक ग अक्षरानें दर्शवितात म्हणून:—

$$\frac{घ}{र} = ग, \quad \therefore \quad घ = गर$$

किंवा. ग = स्पर्शरेषा.

या प्रमाणें प्रत्यक्ष प्रयोग करून हव्या त्या दोन पृष्ठभागांमधील घर्षण किंवा त्यांच्या घर्षणाचा गुणक काढितां येतो.

(१६६) यंत्रस्थितिशास्त्रांत आम्हांस समतोल प्रेरणांचा विचार कर्तव्य असतो, म्हणून एक पृष्ठभाग दुसऱ्या वरून प्रत्यक्ष सरत असतां किंवा चलन पावत असतां जें घर्षण घडेल. म्हणजे घर्षणापासून प्रतिबंध घडेल, त्या विषयीं विचार करणें नाहीं; तर जेव्हां एक पृष्ठभाग दुसऱ्यावरून प्रत्यक्ष सरत नसून केवळ सरण्याच्या स्थितींत येतो, त्यावेळीं जें घर्षण घडतें त्याचा विचार करणें असतो. यावेळीं एका पृष्ठभागाच्या आंगीं दुसऱ्यावरून सरपटतजाण्याचा कल मात्र आलेला असतो म्हणून घर्षणशक्तीनें समतोल धरण्याची मर्यादा होते. म्हणजे घर्षणशक्तीचीही परमावधि असते. समतोलत्व राखण्यांत जेव्हां या परमावधीच्या घर्षणशक्तीचें कार्य घडतें तेव्हां पदार्थ चलनप्रांत किंवा चलनकल्प स्थितींत आहे असें म्हणतात; आणि या अवस्थेंत समतोल स्थितींत पदार्थ आला म्हणजे घर्षण मर्यादा झाली असें समजावें. ही मर्यादा प्राप्त होण्यास जो सपाट पृष्ठभागास कल द्यावा लागतो, त्या कलास विसाव्याचा कोन म्हणतात. क्षितिज सपाटीपासून या कोनाहून लहान असा कोणताही कोन पृष्ठभागानें केला तर त्या स्थितींत घर्षण शक्तीनें पदार्थ समतोल राहतो.

यास्तव घर्षण संबंधीं यंत्रस्थितिशास्त्रांतील कृत्यें व उदाहरणें करितांना दोन गोष्टी काढाव्या लागतात. (१) घर्षणमर्यादा आणि (२) समतोलत्वाच्या सीमा म्हणजे क्षितिज सपाटीपासून कोनपर्यंत कोणत्याही स्थितींत घर्षणशक्तीनें पदार्थ समतोल राहील, त्या-

सीमा. ज्यावेळीं विसाव्याच्या कोनाची स्पर्शरेषा घर्षण गुणका बरोबर असते तेव्हा घर्षण मर्यादेची स्थिति असते. आणि विसाव्याच्या कोनापेक्षां कमी कल असतां सर्व स्थितींत समतोलत्व असतें. घर्षणाचा विचार ज्यांत करणें आहे. असली यंत्रस्थिति शास्त्रांतील कृत्यें व उदाहरणें सोडविण्याची साधारण रीति अशी आहे. समजाकीं घर्षण शक्ति घ आहे आणि र हा दाब आहे समतोलत्वाच्या स्थितींत घ च्या जागीं गर ही किंमत घ्यावी, नंतर ज्या पदार्थाचा विचार करीत आहों त्यांचा घर्षण गुणक ग बरोबर आहे, असें घेतलें म्हणजे केवळ घर्षणानें समतोलत्व राहण्याची मर्यादा समजते. आणि घर्षणगुणकापेक्षां लहान किंमती ग स देऊन बाकी समतोलत्वाच्या स्थिति काढितां येतात.

(१६७) घर्षणाचा व्यापार घडत आहे असलें एक साधें उदाहरण करून दाखवून नंतर यांत्रिक शक्तींत घर्षण व्यापार चालत असतां त्यांतील समतोलत्वाच्या मर्यादा दर्शविणाऱ्या सारण्या काढून दाखवितों.

एका तुळीचें एक टोंक साफ व गुळगुळीत अशा उतरणीच्या सपाटीवर टेंकलें आहे. व दुसरें टोंक खरबरीत अशा क्षितिजपातळीशीं समांतर अशा एका पातळीवर टेंकलें आहे; तर समतोलत्वाच्या मर्यादा काढ.

अब ही एक साफ व गुळगुळीत उतरण आहे. ड अक ही एक क्षितिजपातळीशीं समांतर अशी खरबरीत पातळी आहे. आणि डई ही एक तुळी आहे. डई तुळीचें ड टोंक पातळीवर टेंकलें आहे. आणि इ टोंक गुळगुळीत उतरणीवर टेंकलें आहे. अबक उतरणीचा कल व आहे. आणि इ ड अ कोन घ आ-

हे असें समजूं.

तुळीवर खालीं लिहिल्याप्रमाणें ४ प्रेरणांचीं कार्ये होत आहेत. डअक पातळी चार प्रतिबंध डर या दिक् रेषेंत कार्य करीत आहे. डअक पातळीचें घ घर्षण डघ या दिशेनें कार्य करीत आहे. अब या गुळगुळीत उतरणीचा स प्रतिबंध अबशीं लंब अशा इस दिशेनें कार्य करीत आहे. आणि तुळीचें व वजन तुळीचा गुरुत्वमध्य ग या ठिकाणीं गव या दिक् रेषेंत कार्य करीत आहे. या सर्व प्रेरणांनीं तुळी समतोल आहे. म्हणून या प्रेरणांचे दिक् रेषांत व त्यांशीं लंब अशा रेषांत पृथक्करणकेल्यास दिक् रेषांतील पृथग्भूत भागांची बेरीज शून्य असेल, व दिक्रेषांशीं लंब अशा दिशांतील पृथग्भूत भागांची बेरीज ही शून्य असेल. यास्तव–

$$घ — स \cdot भु \cdot \theta = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (१)$$

$$र — व + स \, को \cdot भु \cdot \theta = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (२)$$

घ = गर ही किंमत (१) यांत लिहून व स्थलांतर करून.

$$गर = स \cdot भु \cdot \theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (३)$$

(२) यास ग नें गुणून व स्थलांतर करून–

$$गर = गव — गस \cdot को \cdot भु \cdot \theta$$

$$\therefore स \cdot भु \cdot \theta = गव — गस \cdot को \cdot भु \cdot \theta$$

$$स (भु \cdot \theta + ग \cdot को \cdot भु \cdot \theta) = गव$$

$$\therefore स = \frac{गव}{भु \cdot \theta + ग \cdot को \cdot भु \cdot \theta} \quad \ldots \ldots (४)$$

ही किंमत (३) यांत लिहून–

$$गर = \frac{गव \, भु \cdot \theta}{भु \cdot \theta + ग \cdot को \cdot भु \cdot \theta}$$

∴ र = व·भु·थ / (भु·थ + ग·को·भु·थ) … … …(५)

ग घर्षणगुणक विवक्षित पदार्थाचा माहीत असतो, किंवा मागें सांगितल्याप्रमाणें प्रत्यक्ष प्रयोगानें काढितां येतो. आतां आह्मांस घ कोन काढणें आहे.

वरील प्रेरणांच्या ड भोंवतालच्या भ्रामकत्वांची बेरीज शून्य असली पाहिजे.

व·डग· को·भु·घ − स·डइ· को·भु·(थ − घ) = ० …(६)

डइ = २ डग.

∴ व· को·भु·घ = २स· को·भु·(थ − घ)

यांत (४) यांतील स ची किंमत लिहून.

व· को· भु· घ = २गव· कोभु·(थ − घ) / (भु·थ + ग· को· भु· थ.)

∴ को·भु·घ = २ग· को·भु·(थ − घ) / (भु·थ + ग· को·भु·थ.) … … …(७)

यांतील ग आणि थ माहीत असल्यामुळें घ ची किंमत काढितां येईल. घ कोन समजला म्हणजे समतोलत्वाची अखेर मर्यादा म्हणजे घर्षणमर्यादा समजते. आतां कोठपासून कोठपर्यंत समतोलत्व राहतें, हें काढावयाचें राहिलें.

(७) या समीकरणाचे छेद सोडवून.

भु·थ· को·भु·घ + ग· को· भु·थ· को·भु·घ = २ग· को·भु·(थ − घ)

∴ ग = भु·थ को·भु·घ. / (२ को·भु·(थ − घ) − को·भु·थ. को·भु·घ.)

ग = भु·थ· को·भु·घ. / (२ को·भु·थ को·भु·घ. + २भु·थ· भुघ − कोभुथ· को·भुघ.)

ग = भु·थ· को·भुघ. / (को·भु·थ· को·भुघ· + २भु·थ· भुघ.)

अंश व छेद यांस को॰भु॰ϑ॰ को॰भु॰घ यानें भागून.

$$ग = \frac{स्पर्शरि॰ϑ.}{1 + २स्प॰ϑ॰ स्प॰घ.} \quad \ldots \ldots \ldots (८)$$

आतां घ = ०, तर ग = स्पर्शरि॰ϑ ... ... (९)

जेव्हां घ = ० असेल तेव्हां तुळी अगदीं आडवी पडेल व घर्षण अत्यंत घडेल. म्हणून स्पर्शरि॰ ϑ हीग ची महत्तम किंमत झाली.

$$जेव्हां\ घ = ϑ,\ तेव्हां\ ग = \frac{स्प॰ϑ}{1 + २स्प॰^२ϑ} \ldots (१०)$$

घ ची किंमत ϑ म्हणजे अत्यंत मोठी होय. घ केवळ ϑ बरोबर असू शकणार नाहीं. कारण असें झाल्यानें तुळी उतरणीशीं समांतर होऊन तिजवर टेंकणार नाहीं. म्हणून घ ची किंमत अगदीं ϑ जवळ जवळ मात्र असूं शकेल; व अशावेळीं ग ची किंमत अत्यंत लहान होईल. म्हणून (१०) यांतील ग ची किंमत लघुत्तम होय.

यास्तव घ ची किंमत ० आणि ϑ यामध्यें आहे, म्हणून-

(१) जेव्हां घर्षणगुणक ग, स्पर्शरि॰ϑ पेक्षा कमी नसेल. तेव्हां तुळी कोणत्याही स्थितींत समतोल राहील.

(२) जर घर्षणगुणक ग याची किंमत स्पर्शϑ आणि $\frac{स्पर्शरिϑ}{1+२स्प॰ϑ}$ यांमध्यें असेल तर ϑ आणि (७) व (८) या समीकरणावरून जी मर्यादा निघेल या दोहोंमध्यें घ ची हवी ती किंमत असूं शकेल.

(३) जर घर्षण गुणक $\frac{स्प॰ϑ॰}{1+२स्प॰^२ϑ}$ याहून लहान असेल तर तुळी कोणत्याही स्थितींत समतोल राहणार नाहीं.

(१६८) घर्षणयुक्त उच्चालक.

असें समजू कीं, अब या भरीव उच्चालकास नळीसारखें गोल

भोंक पाडिलें आहे, व त्यांत तिचा भरींव गोल आंस आहे. आंस स्थिर असून त्यावर उच्चालक मात्र फिरतो. म्हणून खरवरील ओंसाचे भोंकाच्या आंतील पृष्ठभागावर मात्र घर्षण घडेल. आंसाशी लंब अशा पातळीनें आंस व भोंक यांस छेदिल्यास गोल भोंकाचें छिन्न खालील आकृतीतील बाहेरील वर्तुळ दर्शवितें, आणि आंसाचें छिन्न आंतील वर्तुळ दर्शवितें. या छिन्नाच्या पातळींत व अब उच्चालकावर त्याच्याशीं लंब अशा दिशांत श आणि व यांचां कार्यें घडत आहेत. दोन्ही वर्तुळें असमान असल्यामुळें फक्त एका बिंदूंतच स्पर्श करितील; क या बिंदूंत तीं परस्परांस स्पर्श करितात असें समजूं. याच ठिकाणीं खरवरील आंसाचा प्रतिबंध उच्चालकावर होईल. व त्याची दिशा दोहों वर्तुळांचीकडून जाणारी जी साधारण त्रिज्या त्या रेषेंत असेल. हा प्रतिबंध र असून कर रेषेंत कार्य करीत आहे, असें समजूं. घर्षणशक्ति या रेषेशीं लंब अशा दिशेंत म्हणजे क तून जाणाऱ्या साधारण स्पर्शरेषेंत कार्य करील. श, व, र आणि घ या चार प्रेरणांनीं उच्चालक समतोल आहे.

जेव्हां उच्चालक अगदीं समतोल असेल, तेव्हां आंसाचा प्रतिबंध र दिक् रेषेंत कार्य करील व त्यावेळीं घर्षणाचाही व्यापार घडणार नाहीं. परंतु जेव्हां शक्ति किंवा वजन खालीं सरेल तेव्हां या प्रतिबंधाची दिशा दिक् रेषेशीं कांहीं कलती राहील. असें समजूं कीं, हा कल ϑ आहे. जेव्हां व वजनाचा खालीं जाण्याचा कल असेल तेव्हां आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें या प्रतिबंधाची दिशा कडून जाणाऱ्या दिक् रेषेच्या उजव्या बाजूकडे असेल आणि

श चा खालीं जाण्याचा कल असेल, तेव्हां डाव्या बाजूकडे असेल तसेंच घर्षणाचा व्यापार र च्या दिशेशीं लंब अशा दिशेंत नेहमी हो ईल. परंतु व किंवा श खालीं जाऊं लागतील त्यांच्या उलट घर्षण चा व्यापार घडेल. आकृतींत व खालीं जाऊं लागत आहे, असे कल्पिलें म्हणून घर्षणाच्या व्यापाराची दिशा कघ आहे.

बाहेरील वर्तुळाची म्हणजे गोल भोंकाची त्रिज्या त आणि या वर्तुळाच्या मध्यापासून श आणि व यांच्या दिशांवर काढलेल्या लंबाच्या लांब्या न आणि म कल्पूं.

या प्रेरणांची दिक्रेषांत व त्याशीं लंब अशा रेषांत पृथक्क रणें केल्यासः—

र·भु·ठ − घ·को·भु·ठ = ० ... ... (१)

र·को·भु·ठ + घ·भु·ठ − श − व = ० ... ... (२)

क बिंदुभोंवतालचीं भ्रामकलें घेऊं. बाहेरील वर्तुळाच्या मध्यापासून श आणि व यांच्या दिशांवरील लंब न आणि म आहेत. म्हणून क पासून श आणि व यांच्या दिशांवरील लंब— (न+र·भु·ठ) आणि (म−र·भु·ठ) होतील आणि घ आणि र यांचीं भ्रामकलें शून्य असतील. कारण क त्यांच्या दिशांत आहे.

∴ श(न+र·भु·ठ) = व(म−र·भु·ठ) ... ... (३)

जर श खालीं सरूं लागेल, तर कर प्रेरणा दिक्रेषेच्या डाव्या बाजूस असेल. आणि वरील समीकरण असें होईल:

श(न−र·भु·ठ) = व(म+र·भु·ठ) ... ... (४)

आतां घ = गर ही किंमत घेऊं. अशा वेळीं समतोलत्वाच्या मर्यादेच्या स्थितींत घर्षणगुणक ग असतो. ही किंमत (१) यांत लिहूनः—

र·भु·ठ − ग·र·को·भु·ठ = ०

∴ भु·ठ = ग·को·भु·ठ; ∴ स्पर्शि·ठ = ग.

यावरून θ कोन समजतो. (३) व (४) यांवरून श आणि व यांमधील प्रमाण समजतें. (१) आणि (२) यांपासून र आणि घ काढितां येतात.

आतां व खालीं जाऊं लागण्याच्या स्थितींत असतां समतोलत्वाच्या अखेर मर्यादेच्या स्थितींत.

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{म - र भु \cdot \theta}{न + र भु \cdot \theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (५)$$

आणि श खालीं जाऊं लागण्याच्या स्थितींत असतां.

$$\frac{श}{व} = \frac{म + र भु \cdot \theta}{न + र भु \theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (६)$$

यास्तव जेव्हां $\frac{श}{व}$ याची किंमत या दोहोंच्या मध्यें असेल तेव्हां नेहमी समतोलत्व राहील.

$$ग = स्पर्शि \cdot \theta = \frac{भु \cdot \theta}{को \cdot भु \theta}$$

$$ग^2 = \frac{भु^2 \theta}{को भु^2 \theta} \quad \therefore \frac{ग^2}{१ + ग^2} = \frac{भु^2 \theta}{भु^2 \theta + को भु^2 \theta} = भु^2 \theta.$$

$$\therefore भु \theta = \frac{ग}{\sqrt{१ + ग^2}}$$

ही किंमत (५) व (६) यांत लिहून–

$$\frac{श}{व} = \frac{म - र \times \frac{ग}{\sqrt{१ + ग^2}}}{न + र \times \frac{ग}{\sqrt{१ + ग^2}}} = \frac{म - \frac{गर}{\sqrt{१ + ग^2}}}{न + \frac{गर}{\sqrt{१ + ग^2}}}.$$

$$किंवा \ \frac{श}{व} = \frac{म + \frac{गर}{\sqrt{१ + ग^2}}}{न - \frac{गर}{\sqrt{१ + ग^2}}}.$$

यांत म.न,र आणि ग माहीत आहेत.

आतां उच्चालकाचें वजन वे हिशेबांत धरूं. तें गुरुत्व मध्यांत कार्य करील. ग हा गुरुत्वमध्य आहे. आणि त्याचे बाहेरील व तुंळाच्या मध्यापासून अंतर प आहे असें कल्पूं. तर जेव्हां श खालीं जाऊं लागेल तेव्हां क भोंवतालची भ्रामकत्वें घेऊन-

श(न−रभु·थ) + वे(प−रभु·थ)= व(म+रभु·थ)

आणि जेव्हां व खालीं जाऊं लागेल तेव्हां

श(न+रभु·थ) + वे(प+रभु·थ)= व(म−रभु·थ).

(१६९) घर्षणयुक्त उच्चालक व कणा- चाक व कणा पहिल्या प्रकारचा उच्चालक आहे. त्याचा मध्य व गुरुत्वमध्य एकच असतात, म्हणून जर चाकाची त्रिज्या न, कण्याची त्रिज्या म, आणि त्या दोहोंचें वजन वे असल्यास समतोलत्वाच्या मर्यादा खालील समीकरणें दर्शवितील.

श(न∓रभु·थ) + वेरभु·थ= व(म±रभु·थ)

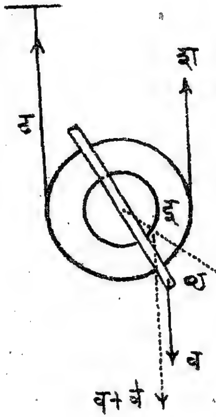
(१७०) एक अचलकप्पी समानभुजांच्या पहिल्या प्रकारचाच उच्चालक आहे. हिचा मध्य व गुरुत्वमध्य एकच असतात. म्हणून कप्पीची त्रिज्या न आणि आंसाची त्रिज्या पूर्वीप्रमाणें र तरजीवरील दोऱ्याचे भाग समांतर आहेत अशा घर्षणयुक्त एका अचलकप्पीच्या समतोलत्वाच्या मर्यादा खालील समीकरणें दर्शवितील.

श(न∓रभु·थ) + वेरभु·थ= व(न±रभु·थ).

(१७१) घर्षणयुक्त एका चलकप्पीच्या समतोलत्वाच्या मर्यादा काढणें.

कप्पीची त्रिज्या त आणि आंसाची त्रिज्या तं घेऊं. चौकटी सकट कप्पीचें वजन वे आहे आणि शक्तीचा वजनास उचलण्याचा कल आहे असें समजूं.

शक्तीचें कार्य वरच्या बाजूस दिक्‌रेषेंत होत आहे. दुसऱ्या बाजूच्या दोरीचा ताण ट घेऊं. त्याचें कार्य दिक्‌रेषेंत पण खालच्या बाजूस होईल. व आणि वं यांचींही कार्यें दिक्‌रेषेंत खालच्या बाजूस होतील. यांच्या परिणामी प्रेरणेची दिशा आंसास ई ठिकाणीं मिळते. आंसाच्या प्रतिबंधाची दिशा या रेषेशीं ठ° कोन करिते असें घेऊं. याच स्थळीं घर्षणाचा व्यापार उलट दिशेस होईल व हाच विसाव्याचा कोन असेल. कप्पीच्या क मध्या भोंवतालचीं भ्रामकलें घेऊं. श आणि ट यांच्या दिशांवरील क पासूनचे लंब त बरोबर आहे. आणि व + वं च्या दिशेवरील क पासूनचा लंब त·भु ठ असेल.



शत = टत + (व + वं) त·भु ठ

परंतु ट = व + वं − श.

∴ शत = त (व + वं) − शत + (व + वं) त·भु·ठ.

∴ २ शत = (व + वं) (त + त·भु·ठ.)

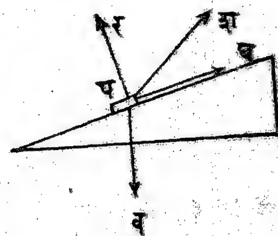
जर व चा खालीं जाण्याचा कल असेल तर घर्षणाचा व्यापार उलट दिशेस होईल.

∴ २ शत = (व + वं) (त − त·भु ठ.).

या दोन मर्यादा निघाल्या.

(१७२) घर्षणयुक्त उतरण.

उतरणीचा कल ठ आहे. व वजनाच्या प पदार्थावर श शक्तीचें पश दिशेनें कार्य होत आ-



हे.पश दिशा उतरणीच्या सपाटीशीं घ कोन करिते.

पदार्थ उतरणीवरून खालीं उतरणार किंवा वर चढणार, म्हणून घर्षणशक्तीचा व्यापार नेहमी उतरणीच्या सपाटीशी होणार. पदार्थाचा खालीं जाण्याचा कल असेल, तेव्हां तिचें कार्य प घ दिशेनें होईल; वर जाण्याचा कल असेल तेव्हां याच्या उलट होईल. असें समजूं कीं पदार्थाचा खालीं जाण्याचा कल आहे. उतरणीच्या सपाटीचा प्रतिबंध र तिच्याशीं काटकोन करणाऱ्या दिशेंत कार्य करील. घर्षणगुणक ग असेल तेव्हां गर घर्षणशक्ति होईल. श,व,र आणि गर किंवा घ यांनीं पदार्थास समतोल धरिलें आहे. उतरणीच्या सपाटीच्या दिशेंत व तिच्याशीं लंब अशा दिशांत यांचीं पृथक्करणें करून.

$$गर + श.को भु घ - व. भु ७ = ० \quad \cdots \cdots (१).$$

$$र + श.भु घ - व. को भु ७ = ० \quad \cdots \cdots (२).$$

(२) यांतील र ची किंमत (१) यांत लिहून—

$$गव को भु ७ - ग श भु घ + श को भु घ - व भु ७ = ०.$$

$$\therefore श (को भु घ - ग भु घ) = व (भु ७ - ग.को भु ७).$$

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{भु ७ - ग को भु ७}{को भु घ - ग.भु घ} \quad \cdots \cdots (३).$$

जर वजनाचा वर चढण्याचा कल असेल, तर घर्षणाचा व्यापार उलट दिशेस होईल; म्हणजे वरच्याच समीकरणांत गर ची किंमत −गर होईल.

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{भु ७ + ग को भु ७}{को भु घ + ग भु घ} \quad \cdots \cdots (४)$$

म्हणून जेव्हां $\frac{श}{व}$ याची किंमत या दोहोंच्या मध्यें असेल, तेव्हां समतोलत्व राहील. म्हणून साधारण सारणी अशी झाली.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}\,\text{थ} \mp \text{ग}\,\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}\,\text{घ} \mp \text{ग}\,\text{भु}\,\text{थ}} \quad \ldots \ldots (५)$$

(१) जर श उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करीत असेल तर घ = ० आणि

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \text{भु}\,\text{थ} \mp \text{ग}\,\text{कोभु}\,\text{थ}.$$

(२) जर शक्ति उतरणीच्या पायाशीं समांतर अशा दिशेंत कार्य करीत असेल, तर घ = − थ

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}\,\text{थ} \mp \text{ग}\,\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}(-\text{थ}) \mp \text{ग}\,\text{भु}(-\text{थ})} = \frac{\text{भु}\,\text{थ} \mp \text{ग}\,\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}\,\text{थ} \pm \text{ग}\,\text{भु}\,\text{थ}}.$$

कारण $\text{कोभु}(-\text{थ}) = \text{कोभु}\,\text{थ}$, $\text{भु}(-\text{थ}) = -\,\text{भु}\,\text{थ}$.

(३) जर पदार्थ क्षितिज सपाटीशीं समांतर अशा सपाटीवर असेल तर थ = ० आणि.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{ग}}{\text{कोभु}\,\text{घ} \mp \text{ग}\,\text{भु}\,\text{घ}}.$$

जर म हा बिसाव्याचा कोन असेल तर स्प म = ग; ही ग ची किंमत वरील (३) व (४) यांत लिहून—

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}\,\text{थ} - \text{स्प}\,\text{म}\cdot\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}\,\text{घ} - \text{स्प}\,\text{म}\cdot\text{भु}\,\text{घ}} = \frac{\text{भु}\,\text{थ}\cdot\text{कोभु}\,\text{म} - \text{भु}\,\text{म}\cdot\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}\,\text{घ}\,\text{कोभु}\,\text{म} - \text{भु}\,\text{म}\,\text{भु}\,\text{घ}} = \frac{\text{भु}(\text{थ} - \text{म})}{\text{कोभु}(\text{घ} + \text{म})}.$$

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}\,\text{थ} + \text{स्प}\,\text{म}\,\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}\,\text{घ} + \text{स्प}\,\text{म}\,\text{भु}\,\text{घ}} = \frac{\text{भु}\,\text{थ}\cdot\text{कोभु}\,\text{म} + \text{भु}\,\text{म}\cdot\text{कोभु}\,\text{थ}}{\text{कोभु}\,\text{घ}\cdot\text{कोभु}\,\text{म} + \text{भु}\,\text{म}\cdot\text{भु}\,\text{घ}} = \frac{\text{भु}(\text{थ} + \text{म})}{\text{कोभु}(\text{घ} - \text{म})}$$

(१) जर शक्ति उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर असेल तर घ = ०.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}(\text{थ} \mp \text{म})}{\text{कोभु}\,\text{म}}, \text{ किंवा } \frac{\text{श}}{\text{व}} = \text{भु}\,\text{थ} \mp \text{ग}\,\text{कोभु}\,\text{थ}.$$

(२) जर उतरणीच्या पायाशीं समांतर असेल तर घ = − थ.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{भु}(\text{थ} \mp \text{म})}{\text{कोभु}(-(\text{थ} \mp \text{म}))} = \text{स्प}(\text{थ} \mp \text{म}) = \frac{\text{स्प}\,\text{थ} \mp \text{स्प}\,\text{म}}{1 \pm \text{स्प}\,\text{थ}\,\text{स्प}\,\text{म}}.$$

स्पघ ग, ही किंमत लिहून.

$$\frac{श}{व} = \frac{स्प\cdot ϑ \mp ग}{१ \pm गस्पϑ}$$

(१७३) उतरणीवरून पदार्थास खालीं जाऊं न देण्यास अगदीं कमी अशी शक्ति किती लागेल, हें काढणें आहे, असें कल्पूं. पदार्थाचा खालीं जाण्याचा कल असतो तेव्हां शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण असें असतें.

$$\frac{श}{व} = \frac{भु(ϑ-घ)}{को\cdot भु(घ+घ)}$$

$$\therefore श = \frac{व\cdot भु(ϑ-घ)}{को\cdot भु(घ+घ)}$$

शाची किंमत अगदीं कमी होण्यास छेद अत्यंत मोठा झाला पाहिजे. अत्यंत मोठी को भु जिच्या म्हणजे १ आहे व ती ०° कोनाची असते. म्हणून जेव्हां को·भु·(घ+घ)=१, म्हणजे घ+घ =० आणि घ = −घ असेल, तेव्हां शाची किंमत अत्यंत कमी होईल. व तिची किंमत अशी असेल. श= व भु(ϑ−घ). यास्तव उतरणीच्या सपाटीच्या खालच्या बाजूस विसाव्याच्या कोनाइतका कोन करणाऱ्या दिशेंत शक्तीचें कार्य घडलें पाहिजे. म्हणजे ही शक्ति पदार्थास खालीं जाऊं देणार नाहीं.

तसेंच पदार्थास उतरणीवर चढविण्यास अत्यंत कमी अशी शक्ति किती लागेल हें काढणें आहे. असें कल्पूं. जेव्हां पदार्थाचा वर जाण्याचा कल असतो तेव्हां शक्ति आणि वजन यां मधील प्रमाण असें असतें.

$$\frac{श}{व} = \frac{भु(ϑ+घ)}{को\cdot भु(घ-घ)}$$

$$श = \frac{व\cdot भु(ϑ+घ)}{को भु(घ-घ)}$$

जेव्हां कांभु (घ-म) = १ म्हणजे घ-म = ० आणि घ = म असेल, तेव्हां श ची किंमत अत्यंत कमी असेल. श = व भु (७+म) एवढ्या शक्तीनें पदार्थाचा वर जाण्याचा कल मात्र असेल. यापेक्षां किंचित जास्त शक्ति झाली कीं पदार्थ वर चढेल. यावरून हें उघड झालें कीं, उतरणीवरून पदार्थ चढविण्यास शक्ति लावण्याची उत्तम दिशा म्हणजे उतरणीशीं घिसाव्याच्या कोनाएवढा कोन करणारी होय.

आतां यांत जर ७ = ० असेल म्हणजे पदार्थ उतरणीवर नसतां क्षितिजसपाटीवर असेल तर श = व भु म म्हणजे खरखरीत अशा सपाट पातळी वरून एकादें वजन सरकविण्यास अगदीं कमी शक्ति लाविणें झाल्यास घिसाव्याच्या कोना इतक्या सपाट पातळीशीं कोन करणाऱ्या दिशेंत शक्ति लाविली पाहिजे. आणि जेव्हां श = व भु श असेल तेव्हां पदार्थ चलनभास असेल.

---

(१७३) घर्षणयुक्त मळसूत्र.

मळसूत्र उतरणीचा रूपभेद आहे. मळसूत्राच्या दांड्याची त्रिज्या त, शक्ति लाविलेल्या उच्चालकाची लांबी त आणि मळसूत्राचा कोन ७ आहेत असें कल्पूं मळसूत्राचा एक वेढा उलगडला असतां जी उतरण होते, तिच्या सपाटीच्या अनेक बिंदूंवर वजन आणि शक्ति पसरलेलीं असतात. तसेंच सूत्राचा प्रतिबंधही त्यांच्या अनेक बिंदूंवर पसरलेला असतो. व हे प्रतिबंध पृष्ठभागाशीं काटकोन करणाऱ्या दिशांत कार्य करितात. अनेक बिंदूंवर $व_1$, $व_2$, $व_3$, $व_4$ ...... इत्यादि वजनें $श_1$, $श_2$, $श_3$, $श_4$ ... ... इत्यादि शक्ति, आणि $र_1$, $र_2$, $र_3$, $र_4$ इत्यादि प्रतिबंध आहेत. घर्षणगुणक ग आहे. जेव्हां वजनाचा जोर श-

क्षीहून जास्त होत आहे. तेव्हां घर्षणयुक्त उतरणीच्या नियमाप्रमाणें:—

$$\left.\begin{array}{l}\frac{श_1}{व_1} = \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ} \\ \frac{श_2}{व_2} = \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ} \\ \vdots \\ \frac{श_न}{व_न} = \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ}\end{array}\right\} \begin{array}{l} \therefore \frac{श_1 + श_2 \cdots + श_न}{व_1 + व_2 \cdots + व_न} = \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ} \\ व_1 + व_2 + व_3 \cdots\cdots + व_न = व \\ श_1 + श_2 + श_3 \cdots + श_न = शत \\ \therefore श_1 + श_2 + श_3 \cdots + श_न = \frac{शत}{त}\end{array}$$

याकिमती वरील समीकरणांत लिहून.

$$\frac{\frac{शत}{त}}{व} = \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ}.$$

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{त}{त} \times \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ}$$

जेव्हां वजनाहून शक्तीचें प्राबल्य जास्त असेल तेव्हां.

$$\frac{श}{व} = \frac{त}{त} \times \frac{भुथ + गकोभुथ}{कोभुथ - गभुथ}$$

म्हणून समतोलत्वाच्या मर्यादेच्या स्थितींत शक्ति आणि वजन यांमधील प्रमाण $\frac{त}{त} \times \frac{भुथ - गकोभुथ}{कोभुथ + गभुथ}$. आणि $\frac{त}{त} = \frac{भुथ + गकोभुथ}{कोभुथ - गभुथ}$ या दोहोंमध्यें असेल म्हणजे जोंपर्यंत श आणि व यांमधील प्रमाण या दोहोंमध्यें असेल, तोंपर्यंत समतोलत्व राहील. म्हणून—

$$\frac{श}{व} = \frac{त}{त} \times \frac{भुथ \mp गकोभुथ}{कोभुथ \pm गभुथ} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots (1)$$

कोभुथनें अंश व छेद यांस भागून:-

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{तं}}{\text{त}} \times \frac{\text{स्प}\cdot\vartheta \mp \text{ग}}{1 \pm \text{गस्प}\vartheta} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (२)$$

जर शक्ति त लांबीच्या उच्चालकानें लाविली नसेल आणि म कसूबाच्या पृष्ठभागींच लागू केली असेल, तर त = तं.

$$\therefore \frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{स्प}\cdot\vartheta \mp \text{ग}}{1 \pm \text{गस्प}\vartheta} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (३)$$

$$\text{स्प}\cdot\vartheta = \frac{\text{सूत्रांतर}}{\text{मळसूत्राचा परीघ}} = \frac{\text{अ}}{२\text{मत}}$$

ही किंमत (०) यांत लिहून.

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{तं}}{\text{त}} \cdot \frac{\frac{\text{अ}}{२\text{मत}} \mp \text{ग}}{1 \pm \text{ग} \times \frac{\text{अ}}{२\text{मत}}} = \frac{\text{तं}}{\text{त}} \times \frac{\text{अ} \mp २\text{मतग}}{२\text{मत} \pm \text{गअ}}.$$

जर तं = त तर

$$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{अ} \mp २\text{मतग}}{२\text{मत} \pm \text{गअ}}.$$

(१७४) याच सारख्या, याहून सरळ रीतीनेंही काढितां येतात.

मळसूत्राचें सूत्रांतर अ त्याची त्रिज्या तं म्हणून त्याचा परीघ २मतं आणि घर्षणगुणक ग आहे असें कल्पू.

मळसूत्राच्या परिघावर श शक्ति कार्य करीत आहे असें समजलों तर मळसूत्रानें तोललेलें वजन ज्या उतरणीची उंची अ आहे, आणि पाया २मत आहे म्हणजे जिच्या कोनाची स्पर्शरेषा $\frac{\text{अ}}{२\text{मत}}$ आहे अशा उतरणीवर तिच्या पायाशीं समां-

तर दिशेंत कार्य करणाऱ्या श शक्तीनें तोलल्याप्रमाणें आहे. म्हणून क. १७२ यांतील सारणींत स्प॰ ७ ची किंमत $\frac{अ}{२मत}$ लिहून घेऊन.

$$\frac{श}{व} = \frac{स्प ७ \mp ग}{१ \pm गस्प ७} = \frac{\frac{अ}{२मत} \mp ग.}{१ \pm ग \frac{अ}{२मत}} = \frac{अ \mp २मतग}{२मत \pm गअ.}$$

परंतु श शक्ति त लांबीच्या उच्चालकानें कार्य करीत आहे. म्हणूनः—

$$श \times त = शं \times तं \therefore शं = श \times \frac{त}{तं}$$

ही किंमत वरच्या समीकरणांत लिहून.

$$\frac{श \times \frac{त}{तं}}{व} = \frac{अ \mp २मतग}{२मत \pm गअ}$$

$$\therefore \frac{श}{व} = \frac{तं}{त} \times \frac{अ \mp २मतग}{२मत \pm गअ.}$$

---

(१७७) व्यावहारिक उपयोग— गति किंवा चलन देतांना जरी घर्षणाचा प्रतिबंध होतो व यामुळें घर्षणाच्या अभावीं जेवढी शक्ति लागेल त्याहून जास्त लागते. तरी घर्षणापासून व्यवहारांत फार फायदा होतो व कित्येक क्रिया तर घर्षणाच्या अभावीं बहुतेक अशक्य झाल्या असत्या. टेंकडीवर चढणें घर्षणाच्या भावीं अगदीं अशक्य झालें असतें. घर्षणामुळें जो चढणीवर पाय ठरतो तो ठरला नसता व दम घेऊन दुसरा पाय टाकण्यास जोर करितां आला नसता. सपाट जमिनीवरसुद्धां चालण्यास मुष्कील पडती कारण घर्षण रहित सपाटीचा दाब तिशी लंब अशा दिशेंत

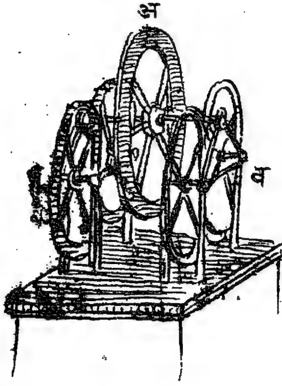
सेल म्हणून चालतांना पायांचा दाबही त्या सपाटीशीं लंब अ-
शा दिशेंत बरोबर पडावा लागेल. परंतु ही गोष्ट व्यवहारांतस-
र्वदां होणें अशक्य असते. म्हणून घर्षणाच्या अभावीं शरीर पु-
ढें नेण्यास जो जोर करावा लागेल, त्याणें शरीर मागें मागेंच प-
डत जाईल आणि पुढें जातां येणार नाहीं. परंतु पाय आणि जमी-
न यांच्या घर्षणामुळें पाय जमिनीवर ठरून पुढें पाऊल टाकण्या-
स जोर करितां येतो. बर्फावर किंवा गुळगुळीत अशा स्निग्ध प-
दार्थ लावलेल्या जमिनीवर किंवा काठीवर किंवा कांचेसारख्या अ-
गदीं साफ गुळगुळीत पृष्ठभागावर चालण्याचें फार कठीण पडतें.
विलायतेंत सणाच्या दिवसांत एक खेळ करितात. त्यांत डुकराच्या शें-
पटीस साबू लाऊन गुळगुळीत करितात, व ती गुळगुळीत शेंपटी ध-
रून जो त्या डुकरास धांवतांना धरील त्यास कांहीं इनाम देण्या-
चें कबूल करितात. कारण शेंपटीच्या गुळगुळीतपणामुळें घर्षण
फार कमी असतें. त्यामुळें त्यावर अत्यंत जोर केल्याशिवाय हा-
त ठरत नाहीं. तसेंच मुंबईंत व इतर ठिकाणीं पैंजांच्या दिवशीं-
ही एक खेळ करितात. त्यांत एका गुळगुळीत खांबास चरबी ला-
वून त्याच्या टोंकास कांहीं रुपये बांधतात. आणि तो खांब पुर-
तात. किंवा कशास तरी उंच आडवा बांधतात. नंतर जो त्या खां-
बावर चढून किंवा दुसऱ्या टोंकावरून रुपये बांधलेल्या टोंकाप-
र्यंत हातानें उलकंबून चढून जाऊन बांधलेले रुपये घेईल, त्या-
स ते इनाम देतात. परंतु खांब बराच घर्षणरहित झाल्यामुळें त्या-
वर चढतांना लोक धडाधड पडतात, व हंशा पिकतो. घर्षणाच्या
अभावीं हातांत एखादा ग्लास अगर एखादा गुळगुळीत पदार्थ घट्ट धरणें फा-
र कठीण जातें. बर्फाचा तुकडा हातांत सहजीं घट्ट धरतां येत ना-
हीं, हें याचें चांगलें उदाहरण आहे. गुळगुळीत रस्त्यावर गा-
डी कधींही चालवितां व थांबवितां येणार नाहीं. आगगाडीच्या

रुळांवर घर्षण पुष्कळ कमी असतें. तथापि कांहीं घर्षण असतें म्हणूनच मोठीं वजनें त्याच्या यंत्रास पुढें ओढितां येतात. घर्षणाच्या अभावीं मळसूत्रें, खिळे, खुंट्या वगैरे मारून जे पदार्थांचे वेगळे वेगळे भाग जोडतां येतात ते मुळींच आले नसते. परंतु दोहोंमध्यें घर्षण असतें म्हणून हे आपल्या जागीं राहून दोहों भागांस घट्ट धरितात. लांकूड चिरण्याकरितां किंवा फोडण्याकरितां पाचर आघातांनीं आंत मारितों. परंतु आघात क्षणिक असतात म्हणून आघात बंद झाल्यावर घर्षणामुळें लांकडानें पाचरास धरिलें नसतें, तर पाचर लांकडाच्या प्रतिबंधानें बाहेर निघालें असतें; परंतु वस्तुतः एकामागून एक टोले बसेपर्यंत पाचर घर्षणानें लांकडांत स्थिर राहते. इतकेंच नव्हे तर मोठमोठ्या इमारती व बांध यांस दृढता व मजबुती घर्षणाच्या अभावीं अगदीं नसती; आणि त्यांचे सर्व तुकडे तुकडे होते. इमारतीच्या बांधणींत दगड विटांचा उपयोग करितों. त्यांत त्यांच्या पृष्ठभागांच्या घर्षणावर त्यांची फार मजबुती अवलंबून असते. या प्रमाणें सृष्टींत ही घर्षण अत्यंत उपयोगी शक्ति आहे. जेव्हां यंत्राचा केवळ वजन किंवा एखादा प्रतिबंध तोलून धरण्यास उपयोग करावयाचा असतो, तेव्हां घर्षणाचें कार्य शक्तीबरोबर होत असल्यानें घर्षणानें यांत्रिकस्वार्थ प्राप्त होतो. पट्याळेंव दुसरीं यंत्रें बसवितांनांही घर्षणशक्तीचा फारउपयोग होतो. कोणत्याही यंत्रास किंवा पदार्थास चलन देण्याचें असतें. त्यावेळीं मात्र घर्षण अगदीं नाहींसें नाहीं, परंतु बरेंच कमी करावें लागतें. व त्याकरितां अनेक उपाय योजीत त्यापैकीं कांहीं खालीं दिले आहेत.

(१७६) (१) घांसणाऱ्या सपाट्या गुळगुळीत कराव्या परंतु हा गुळगुळीतपणा कांहीं मर्यादेच्या आंत असावा लागतो. (२) जे पदार्थ परस्परांवर घांसणार ते निर निराळ्या जातीचे घ्यावे. आंस तिरख्याचे असतात. आणि ते ज्यांत फिरतात ते अवश्य पितळेचे कि-

या लोखंडाचे असतात. घड्याळें आणि त्यांसारखीं दुसरीं लहान यंत्रें यांत तिरक्याचे आंस अकीक किंवा हिरा यांत फिरतात. (३) पदार्थांच्या घर्षण पावणाऱ्या अवयवामध्यें स्निग्ध पदार्थ घालावे. मृदु अवयवांत चरबी, घट्टग्रीस इत्यादि घालावें. आणि कठीण पृष्ठभागांस तेलासारखे द्रवपदार्थ लावावे. धातु लांकडावर फिरते तेव्हां चरबी, डांबर किंवा दुसरे दाटग्रीस हे पदार्थ लावावे; धातु धातूवर फिरते तेव्हां तेल घालावें. कठीण व गुळगुळीत धातूचा पृष्ठभाग असला म्हणजे फार पातळ असें तेल घ्यावें. शिसपेन्सली ज्या दगडाच्या करितात, त्यांची पूड ही घर्षण कमी करण्यास फार उपयोगी पडते. (४) पदार्थांच्या घांसणाऱ्या अवयवांचा विस्तार कमी करावा; आंसाचा जो भाग चाकांत फिरतो तो कमी ठेवावा. (५) पदार्थ नुस्ते जमिनीवरून ओढावे त्याबद्दल चाकांच्या गाडींत घालून किंवा गोल रुळांवरून ओढावे. पदार्थ सरपटत ओढीत नेला असतां जेवढा घर्षणाचा प्रतिबंध होतो, त्याहून गोल रुळ किंवा चाक गरगरा फिरत असतां ओढीत गेल्यानें फारच कमी घडतो. याचीं कारणें दोन असतात. गोल चाकें किंवा रुळ जमिनीवर उभे असतां एका रेषेनें मात्र जमिनीस स्पर्श करितात. म्हणजे घांसणाऱ्या पृष्ठभागांचा विस्तार कमी असतो. आणि गरगर फिरण्यामुळें कोणतेही भाग एकमेकांसन्निध फार वेळ राहत नाहींत यामुळें इतर उपायांपेक्षां या रीतीनें घर्षण फार कमी करितां येतें. चाकांच्या गाड्यांवरून केवढीं वजनें थोड्या शक्तीनें नेतां येतात, हें सर्वांस माहीत आहेच. तसेंच मोठें लांकूड किंवा दगड ओढावयाचा असला म्हणजे त्या खालीं वाटोळीं लांकडें घालतात. तोफेच्या गाड्यास सपाट बैठक असल्ये तेव्हां वाटोळे दांडे किंवा गोळे त्याखालीं घालून फिरवितात. एक ५६० शेर वजनाचा आबडधोबड दगड खाणींतून वर काढण्यास ३७१ शेरांची शक्ति लागली, वि-

न चाकाच्या गाड्यांत घालून लांकडी फळीवरून त्यास ओढिलें. तेव्हां ३०३ शेरांची शक्ति लागली. लांकडी फळीस चरबी लावूनतुळतुळीत केलें तेव्हां ९१ शेरांची शक्ति ओढण्यास बरस झाली. परंतु जेव्हां लांकडी गोल रुळांवरून दगड ओढिला तेव्हां सारी १४ शेरांची शक्ति अगदीं बस्स झाली. (६) ज्यांस **घर्षणचक्रें** म्हणतात त्यांचा उपयोग करावा. आंस गोल भोंकात न फिरता तो खालील आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें घर्षणचक्रांच्या परिघांवर राहतो व यामुळें घर्षण अत्यंत कमी होतें.



आकृतींत अ चाकाचा आंस **बब** या घर्षणचक्रांच्या परिघांवर आहे.

रवडी घालून साफ व समाट रस्त्यावर घर्षण बरेंच कमी घडतें; परंतु आगगाडीच्या रुळाच्या रस्त्यावर तर फारच कमी घडतें. घर्षण कमी केल्यानें चलनास फार उपयोग होतो. परंतु गाडी थांबवितांना या पासून अडथळा येतो. गाडी थांबवितेवेळीं घर्षण वाढवावें लागतें. म्हणून आगगाड्यांस मोठे मोठे **ब्रेक** म्हणजे प्रतिबंधक लाविलेले असतात. त्यांस गाडी थांबविते वेळीं चाकांवर लागू करितात. प्रसंगविशेषीं घर्षण वाढविण्याकरितां असले ब्रेक फेटणीसही असतात. मोठ्या उतरणीवरून छकडे उतरतांना गरगर गति नाहींशी करून घर्षण वाढविण्या करितां चाकें बांधतात.

अनेक प्रयोगांवरून काढलेले कांहीं घर्षणगुणक खालीं दिले आहेत.

लांकडावर लांकूड. (तेलाशिवाय) ... ...०.५.

लांकडावर लांकूड.	(तेल लाविल्यावर)...	०·२
धातूवर लांकूड.	(तेलाशिवाय.) ...	०·६
,, ,,	(तेल लाविल्यावर)...	०·१२
धातूवर धातु.	(तेलाशिवाय)... ...	०·१८
,, ,,	(तेल लाविल्यावर)...	०·१२
लोखंड दगडावर.	(तेलाशिवाय)	०·७
,, ,,	(तेल लाविल्यावर)...	०·३
लांकडावर चामडें.	(तेलाशिवाय)... ...	०·६२
,, ,,	(पाण्यानें भिजविल्यावर)	०·८७
लोखंडावर लोखंड. - - - - - - - - - -		०·१०

उदाहरण १:- एका घाटाच्या रस्त्यांत १०० फूट लांबीत ५ फूट चढ आहे. त्यावरून ६ टनाचें ओझें ओढण्यास किति शक्ति लागेल? घर्षण गुणक $\frac{१}{२४}$ आहे.

आगगाडीच्या व इतर रस्त्यांचे चढउतार लांबीच्या मानानें इतके लहान असतात कीं, पदार्थाच्या वजनाइतकाच बहुतेक रस्त्याच्या सपाटीचा दाब आहे, असें मानण्यास हरकत नाहीं. वजन वर चढवावयाचें आहे म्हणून घर्षणाचा व्यापार खालच्या बाजूस होईल.

येथें ग = $\frac{१}{२४}$, व = ६, र = ६, उंची = ५, लांबी = १०

∴ घ = गर = $\frac{१}{२४}$ × ६ = $\frac{१}{४}$, भुज = $\frac{५}{१००}$ = $\frac{१}{२०}$.

या चारी प्रेरणा समतोल आहेत, म्हणून त्यांचे उतरणीच्या सपाटीशीं समांतर पृथक्करण केल्यास पृथग्भूत भागांची बेरीज शून्य होईल.

$$घ + व भुज - श = ०$$

$$\therefore श = घ + व भुज.$$

$= \frac{१}{४} + ६ \times \frac{१}{२०} = \frac{१}{४} + \frac{३}{१०} = \frac{११}{२०}$ टन.

उत्तर $\frac{११}{२०} \times २० = ११$ हंड्रेडवेट.

उदाहरण २ ३०° कलांच्या खरबरीत उतरणीवर १० पौंड वजन स्थिर आहे. तर घर्षणशक्ति किती व उतरणीच्या सपाटीचा प्रतिबंध किती तें काढ.

र = व कोभु θ आणि घ = र स्प θ.

कोभु θ = कोभु ३०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$, स्प ३० = $\frac{१}{\sqrt{३}}$.

$\therefore$ र = $१० \times \frac{\sqrt{३}}{२} = ५\sqrt{३}$

घ = $५\sqrt{३} \times \frac{१}{\sqrt{३}} = ५$

उदाहरणें.

(१) सपाट आगगाडीच्या रुळावर ३० टन वजनाचे डबे ओढावयाचे आहेत. घर्षणाचा प्रतिबंध दर टनास ८ पौंडांचा किंवा एकंदर प्रतिबंध वजनाच्या $\frac{१}{२८०}$ आहे. तर घर्षणाचा प्रतिबंध अतिक्रमण करण्यास शक्ति किती लागेल?

उ॰ २४० पौंड

(२) आगगाडीच्या रुळावर १०० फूट लांबींत २ फूट चढ आहे. ७० टन वजनाची गाडी वर चढविण्यास किती शक्ति लागेल? घर्षणगुणक $\frac{१}{२८०}$ आहे.

उ॰ २६,४० पौंड.

(३) १८ इंच लांबीच्या देवद्वारी लांकडाच्या रुळावर खडूचा चपटा तुकडा ठेविला, तर रुळाचें एक टोंक $७\frac{३}{८}$ इंच वर उचललें म्हणजे खडू खालीं सरूं लागतो, तर खडू व देवद्वार यांमधील घर्षणगुणक काढ?

उ० ४७७

(४) एका उच्चालकाच्या भुजा १० फूट आणि २ फूट आहेत, आं-

स लोखंडी असून उखालकाच्या आंकांत ओक लाकडाची चौकट
किंवा साकाटा बसविलेला आहे. आंसाचा व्यास ६ इंच आहे. आ-
णि लोखंड व ओक यांचा घर्षणगुणक०.६२ आहे, तर १० फूट लांबीच्या
भुजेस ३० पौंडाची शक्ति लाविल्यास केवढें वजन तो उचलूं शकेल?

उ: ९४.५ पौंड.

(

(५) जर वरच्या उदाहरणांत साकाटाही लोखंडीच असला व
घर्षणगुणक० ११ असला तर किती वजन उचललें जाईल, आणि घ-
र्षण मुळींच नसल्यास किती वजन उचललें जाईल?

उ. ९८ पौंड, १०० पौंड.

(६) ६ इंच व्यासाच्या चाकाच्या परिघापासून २ औंसाचें व-
जन टांगिलें असतां तें ६.५ इंच व्यासाच्या कण्यावर ५७ औंसांचें व-
जन तोलून धरितें. यांच्या आंसाचा व्यास २० इंच आहे तर घर्षणगुण-
क काय?

उ: $\frac{१}{\sqrt{१५}}$

(७) ओक लांकडाची पेटी ओक लांकडाच्या उतरणीवर स्थिर
आहे. उतरणीची उंची ३ फूट आणि लांबी १४ फूट आहे. पेटीचें वज-
न ९६.४ पौंड आहे. उतरणीवर चढविण्यास आणि खालीं लोटण्या-
स अनुक्रमें किती शक्ति लागेल. आणि घर्षण मुळींच नसलें तर व-
र चढविण्यास किती शक्ति लागेल तें सांग? घर्षणगुणक०.५४ आहे.

उ. { वर चढविण्यास ७१०.३८ पौंड.
खालीं लोटण्यास ३७७.११ पौंड.
वर चढविण्यास २०६ पौंड.

(८) ओकच्या ३६° कलांच्या उतरणीवरून लोखंडी कां-
व चढविण्यास ५० शेरांची शक्ति उतरणीशीं ४०° चा कोन करणा-
ऱ्या दिशेंत लाविली आहे. तर केवढें वजन वर चढेल? घर्षणगुणक
०.६२ आहे.

उ. ७३ $\frac{1}{2}$ शेर.

(९) खरबरीत उतरणीवर १० पौंडांचें वजन तोलून ध
ण्यास ३ पौंडांची शक्ति लागते आणि गुळगुळीत उतरणीवर ६
डाची शक्ति लागते. तर उतरणीचा प्रतिबंध आणि शक्ति या दोहोंच
वजनावर किती दाब पडतो.

उ. $\sqrt{८^२ + ३^२} = \sqrt{७३.}$

(१०) ३०° कलाच्या खरबरीत उतरणीवर केवळ घर्षणश
क्तीनें एकापदार्थास खालीं जाऊं न देतां तोलून धरिलें आहे. त
असें दाखीव कीं, पदार्थाच्या वजनापेक्षां जास्त जोराची शक्ति अ
सल्या शिवाय पदार्थ वर चढणार नाहीं.

(११) क्षितिज पातळीशीं समांतर अशा पातळीवर एक पद
र्थ आहे. घर्षणाचा प्रतिबंध दूर करण्यास पदार्थाच्या वजना एव
शक्ति क्षितिजपातळीशीं समांतर दिशेंत लावावी लागते. ही पातळ
जर हळू हळू वर उचलीन गेलें तर केवढा कोन झाला म्हणजे पद
र्थ खालीं सरकू लागेल?

उ. ४५°

(१२) खरबरीत उतरणीची उंची व लांबी ३ : ५ या प्रमा
णांत आहेत. हिजवर १५ शेरांचें वजन घर्षणशक्तीनें तोलून ध
रिलें आहे. तर घर्षणाचा जोर किती शेरांचा आहे तें काढ?

उ. ९ शेर.

(१३) उतरणीची उंची व लांबी ३ : ५ या प्रमाणांत आहेत
१० शेरांचें वजन नुस्त्या घर्षणशक्तीनें तोलून मात्र धरिलें आहे. त
र असें दाखीव कीं, १२ शेरांच्या शक्तीनें त्या वजनाचा वर चढण्या-
चा कल होईल.

(१४) उतरणीची सपाटी साफ व गुळगुळीत असली तर
सपाटीशीं समांतर दिशेंत कार्य करणारी ७ मणाची शक्ति २५

मणाच्या वजनास तोलून धरूं शकते. तर तीच उतरण खरबरीत अ-सून घर्षणगुणक $\frac{७}{१२}$ असला तर तें वजन ओढण्यास त्याच दिशें-त केवढी शक्ति लागेल.

उ: १७ मणाहून जास्त.

(१५) वरच्या उदाहरणांत अत्यंत फायदेकारक अशा दिशेंत शक्ति लाविल्यास किती लागेल, म्हणजे अत्यंत कमी शक्ति किती ला-गेल?

उ: १५$\frac{१}{१३}$ मण.

(१६) खरबरीत फरशीवर एका साफ गुळगुळीत अशा ए-का घराच्या भिंतीस टेंकून एक शिडी ६०° चा कोन करण्याजोगी कलती ठेविली आहे; तर असें दाखीव कीं जेव्हां मनुष्य शिडीवर च-ढून गुरुत्वमध्य अर्ध्या शिडीच्यावर जातो तेव्हां शिडीचें बूड आ-णि फरशी यांमधील घर्षणगुणक $\frac{१}{६}\sqrt{३}$ असतो.

(१७) एक मोठी तुळी जमिनीवर एका उभ्या भिंतीशीं टेंकून क-लती ठेविलेली आहे. तर जमीन आणि भिंत यांचे घर्षण गुणक ग, गं दिले असतां तुळीच्या टोंकापासून तिच्या गुरुत्वमध्याचीं अं-तरें अ, ब दिलीं असतां मर्यादेच्या स्थितींत क्षितिजपातळीशीं शिडी किती कलती राहील.

उ. स्प. ए = $\frac{अ - गगंब}{(अ + ब) ग}$.

(१८) चाकाची त्रिज्या २० इंच आहे; कण्याची त्रिज्या ६ इंच आहे आणि चाक व कणा यांचें वजन ७० पौंड आहे. चा-क व कणा ज्या आंसावर फिरतात त्या आंसाची त्रिज्या १ इंच आ-हे. घर्षणगुणक $\frac{१}{१०}$ आहे, तर १०० पौंडांचें वजन उचलण्यास केवढी शक्ति लागेल. (कोन फार लहान असला म्हणजे स्पर्श रेषेबरोबरच भुजिज्या घेण्यास हरकत नाहीं)

उ॰ ३१ $\frac{१}{१९९}$ पौंड.

(१९) मळसूत्राचें सूत्रांतर असें आहे कीं, कांहीं शक्ति लाविल्याशिवाय केवळ घर्षणानें वजन तोललें जातें. तर व वजन उचलण्यास अगदीं कमी अशी किती शक्ति लागेल.

उ॰ श = $\frac{२गव}{१-ग}$

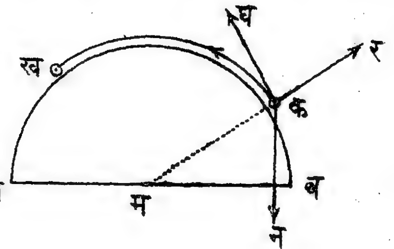
(२०) बुकें दाबण्याच्या मळसूत्राच्या चापणीचा यांत्रिकस्वार्थ २५० आहे आणि नुसत्या मळसूत्राचा यांत्रिकस्वार्थ २० आहे; तर २६० पौंडाचा प्रतिबंध अतिक्रमण करण्यास केवढी शक्ति लावावी लागेल? घर्षणगुणक $\frac{१}{२}$ आहे.

उ॰ १२$\frac{२}{९}$ पौंड.

(२१) उतरणीचा कल इतका आहे कीं, तिजवर शक्ति लाविल्या शिवाय केवळ घर्षणानें विवक्षित वजन तोललें जातें; तर असें सिद्ध कर कीं, त्या उतरणीवर वजन चढविण्यास अगदीं कमी शक्ति साफ गुळगुळीत अशा उतरणीवर तेंच वजन तोलून धरण्यास जी शक्ति लागेल तिच्या दुप्पट असेल.

---

(२२) एका खरबरीत अशा अर्ध वर्तुळाच्या परिघावर क आणि ख हीं दोन वजनें असून त्यांस एका दोरीनें जोडलें आहे. क व ख यांचीं स्थळें वर्तुळाच्या मध्य बिंदूशीं सांधिल्यास काटकोन होतो तर समतोलत्वाच्या स्थितींत अगदीं खालीं असें क वजन कोणत्या ठिकाणीं असेल?



अ ख ब क ब हें अर्धवर्तुळ आहे. म मध्य आहे. इच्छित समतोलत्वाच्या स्थितींत क म सांधिल्यास क-

मब कोन θ होतो असें कल्पूं.

क वजन खालीं सांगितल्या चार प्रेरणांनीं समतोल राहिलें आहे.

(१) क वजन कन या दिक् रेषेंत कार्य करील.

(२व३) घ घर्षण आणि त दोरीचा ताण कघ या स्पर्शी रेषेंत कार्य करितील.

(४) र प्रतिबंध स्पर्शी रेषेवर लंब अशा कर रेषेंत कार्य करील.

या प्रेरणांचीं स्पर्शी रेषेंत व तिशीं लंब अशा दिशेंत पृथक्करणें करून आणि घ = गर घेऊन.

$$क\cdot भु\,\theta - र = ०\quad \dots\quad \dots\quad \dots\ (१)$$

$$क\cdot को भु\,\theta - गर - त = ० \dots\ (२)$$

(१) यांतील र ची किंमत (२) यांत लिहून.

$$क\cdot को भु\,\theta - गक\, भु\,\theta - त = ०$$

याच प्रमाणें ख च्या समतोलत्वाच्या स्थितींतील दोन समीकरणां पासून पुढील समीकरण येईल.

$$ख\, भु\,\theta + गख\, को भु\,\theta - त = ०$$

या दोहोंची वजाबाकी करून व कंस काढून.

$$(क - गख)\, को भु\,\theta - (ख + गक)\, भु\,\theta = ०$$

$$\therefore भु\,\theta\,(ख + गक) = को भु\,\theta\,(क - गख).$$

$$\therefore स्प\cdot\theta = \frac{क - गक}{ख + गक}.$$

यावरून क चें स्थान समजतें.

समाप्त.

या पुस्तकांत ज्या इंग्रजी शब्दांस त्यांचे अर्थसूचक असे मराठी किंवा संस्कृत शब्द दिले आहेत त्यांचा कोश.

पृ.	मराठी.	इंग्रजी.
२५५	अनंतमळसूत्र.	Endless Screw.
१८३	आंसास खिळलेलें चाक किंवा चाक व कणा.	Wheel & Axle.
१५५	उच्चालक.	Lever.
१५७	उच्चालक सरळ.	Straight Lever.
१५७	उच्चालक वांकडा.	Bent Lever.
१५७	उच्चालक शक्ति.	Power applied to a Lever.
१५७	उच्चालकाच्या भुजा.	Arms of a Lever.
१७६	उच्चालकांची सांगड.	Compound Lever.
१५७	उच्चाल्यपदार्थ.	Weight or body sustained by a Lever.
१९९	कंटक चाकें.	Spur Wheels.
२०७	कप्पी.	Pulley.
२०७	कप्पी अचल.	Fixed or immoveable Pulley.
२०७	कप्पी चल.	Moveable Pulley.
२०७	कप्पींना आंस.	Pivot or axis of the Pulley.
२०७	कप्पीची चौकट.	Block of the Pulley.
२०७	कप्पीवरील खांच.	Groove of the Pulley.
२१०	कप्प्यांची पहिली रचना.	First system of Pulleys.
२११	——— दुसरी रचना.	Second system of Pulleys.
२११	——— तिसरी रचना.	Third system of Pulleys.
४३	कार्यमार्ग.	Way of Action.
८	कार्यदर्शकरेषा.	Line representing the action of a Force.
१९९	किरीटचाकें	Crown Wheels.
३	क्षितिजपातळी.	Horizontal Plane.
	——— समांतर.	Horizontal.
२	गतिशास्त्र.	Dynamics.
४९	घटकप्रेरणा.	Component Forces.
२६२	घर्षण.	Friction.
२६२	घर्षणगुणक.	Coefficient of Friction.

२६८ घर्षणमर्यादा.	Limiting Position of equilibrium.
२६८ चलनप्रांताकिंवाचलनकल्प.	Bordering on Motion.
१९३ चाकें व कणेयांचीसांगड	Combination of Wheels and Axles.
१८६ छिन्न.	Section.
१५६ टेंकू.	Fulcrum.
१६५ टेंकूवरील दाब.	Pressure on the Fulcrum.
१७३ डेनिश तराजूं.	Danish Steel Yard.
१६६ तराजू.	Balance.
१६७ तराजू खरा.	True Balance.
१६७———खोटा.	False Balance.
१६७———सूक्ष्म.	Sensible Balance.
१६७———स्थायी.	Stable Balance.
२०० तिर्यक् दांत्यांचीं चाकें.	Bevelled Wheels.
१९८ दांत्ये असलेलीं चाकें.	Toothed Wheels.
४ दाब.	Pressure.
३१।१३३ दिक्‌रेषा—लंबरेषा.	Vertical Line.
२३२ दुरी उतरण.	Double Inclined Plane.
६ दृढपदार्थ.	Rigid Body.
१७५ पत्रें वजन करण्याचा तराजू.	Letter Balance.
फलितप्रेरणा.	
६ परिणामी प्रेरणा.	Resultant.
११४ परिणामी युग्म.	Resultant Couple.
२३७ पाचर.	Wedge.
२६२ प्रतिबंध,	Resistance.
१ प्रेरणा.	Force.
४३ प्रेरणा त्रिकोण.	Triangle of Forces.
२ प्रेरणापृथक्करण.	Resolution of Forces.
५८ प्रेरणा बहुकोण.	Polygon of Forces.
१०६ प्रेरणायुग्म अथवा जुळें.	Couple.
१०७ प्रेरणायुग्माचा आंस.	Axis of a Couple.
१०७ प्रेरणायुग्माची भुजा.	Arm of a Couple.
११ प्रेरणारोहण.	Superposition of Foaces.
२ प्रेरणैकीकरण.	Composition of Forces.
५४ प्रेरणेचा दिलेल्या दिशेंत परिणाम.	Effect of a Force in a given direction.
५४ प्रेरणेचा विवक्षितदिशेंतील पृथग्भूतभाग.	Resolved part of a Force in a given direction.
३ प्रेरणेचें कार्य.	Action of a Force.

१०४	प्रेरणेचें पातळीसंबंधीं भ्रामकत्व.	Moment of a Force with respect to a Plane.
८६	प्रेरणेचें भ्रामकत्व.	Moment of a Force.
८६	प्रेरणेचें विवक्षित बिंदूसंबंधीं भ्रामकत्व.	Moment of a Force about a given Point.
८	प्रेरणेचें संचरत्व.	Transmissibility of a Force.
१०२	प्रेरणेचें सरळ रेषेसंबंधीं भ्रामकत्व.	Moment of a Force with respect to a Line.
८६	भ्रामकत्व.	Moment.
२४१	मळसूत्र.	Screw.
२४२	मळसूत्राचा कल किंवा कोन.	Angle of a Screw.
२४२	मळसूत्राचा वेढा.	Revolution of a thread.
२४२	मळसूत्राचें सर्पाकृति सूत्र किंवा मळसूत्राची धार.	Thread of a Screw.
१५५	यांत्रिक शक्ति.	Mechanical Powers.
१७२	वजनकरण्याची साधी दांडी किंवा रोमन तराजू.	Roman Steelyard.
१७१	वजनकरण्याच्या दांड्या.	Steelyards.
२६६	विसाव्याचा कोन किंवा घर्षणकोन.	Angle of Friction.
१	समतोल प्रेरणा.	Forces in Equilibrium.
११२	स्थितिशास्त्र.	Statics.
१३८	समरूप किंवा सारख्या दाटणीचा.	Of Uniform Density.
७०	समांतरप्रेरणा.	Parallel Forces.
७९	समांतरप्रेरणांचा मध्य.	Centre of Parallel Forces.
१२०	समतोलपणाच्या आवश्यकगोष्टी.	Conditions of Equilibrium.
२६८	समतोलपणाच्या सीमा	Limits of Equilibrium.
१३८	समरूपद्रव्यमय.	Of uniform material.
१५५	साधीयंत्रें.	Simple Machines.
१९०	संयुक्तचाक व कणा.	Compound Wheeland Axle.
२५२	संयुक्तमळसूत्र.	Compound Screw.
१९३	सततगति पट्टे.	Endless Straps.

List of Works Consulted.

Goodwin's Statics.
Todhunter's Mechanics for Beginners.
Lardner's Mechanics.
Newth's Natural Philosophy.
Parkinson's Mechanics
Minchin's Statics.
Baker's Statics and Dynamics.
Galbraith and Haughton's Manual of Mechanics.
Greave's Statics.
Rawlinson's Statics.
Todhunter's Analytical Statics.
Venkatrao's Natural Science.
Naegamwalla's Mechanics.
Newth's Mechanics.
Tomlinson's Mechanics.
Baker's Mechanism.
फडकेकृत यंत्रशास्त्राचीं मूलतत्वें.

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	याच्या जागीं शुद्ध.
४	४	केवढा.	केवढ्या.
११	४	उ ठिकाणीं.	अ ठिकाणीं.
१६	८	दिशानीं.	दिशांनीं.
१७	१	म्हणजे.	तेव्हां.
२०	१४	अ,प.	अप.
२२	२	अ, ग	अग.
२३	११	अ,म आणि अ,न	अम आणि अन
२४	१	अब अक	अब, अक.
२५	१०	अ , ज	अज.
३०	९	परंतु अ∴इ रेषा	परंतु अइ रेषा.
३२	२१	करव मेरणा	क,रव मेरणा.
३३	७	गड7 अइ	गड7 अड.
३३	१८	उ अ इ असेल	ऊ अ ई असेल
३७	४	कोनास.	कोनांस.
३८	६	तीन मेरणा	तीन समान मेरणा.
३८	८	(२२)	(२१)
३९	१५	—रवकोभु(थ)—	—रवकोभुथ४
४३	८	आणि क, अ	आणि कअ.
४२	१०	नर	जर
४३		या पृष्ठांतील त्रिकोणाच्या कोनाच्या न च्या जागीं ब अक्षर पाहिजे.	
४४	२	पफ, बयाही,	प, फ, ब याही,
४७	१	आणि बक,	आणि बव,

पृष्ठ.	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
४७	२३	म्हणून बकड रेषा	म्हणून कड रेषा
४९	९	कार्यदर्शक प्रेरणा.	कार्यदर्शक रेषा.
४९	१४	(क)	(क० ५०)
५०	२३	अंशाचे.	अशांचे.
५०	२४	याशीं	यांशीं
५५	९	प्रेरणेच्या पृथग्भूत.	प्रेरणांच्या पृथग्भूत.
५७	१२	अत लांबी	अतची लांबी.
५८	२१	बहुकोणाच्या बाजू.	बहुकोणाकृतीच्या बाजू.
५९	३	प्रेरणेचें परिणाम.	प्रेरणेचें परिमाण.
५९	७	तर क.	तर क. ३७
५९	८	कक$_{१}$ भुअ$_{१}$	क$_{१}$ भुअ$_{१}$
६०	४	स्प. रे. (भु. ब)	स्प. रे. ब.
६१	१५	समांतर चौकोन.	समांतरभुज चौकोन.
६५	४	तीन वडय.	तीन व डय.
७०	१७	अनेक बिंदूवर	अनेक बिंदूंवर.
७१	७	पदार्थांवर अब	पदार्थावर अ, ब.
७१	१८	कख आणि गड.	क, ख गड
७२		आकृतींतख प्रेरणा कार्य करिते त्या ठिकाणीं ब अक्षर घालावें.	
७२	२६	क प्रेरणा गड दिशेनें	कप्रेरणा गड दिशेनें.
७२	२६	ख, गड दिशेनें	ख, गड दिशेनें.
७५	२६	अंतरें अब	अंतर अ, ब.
७७	२१	कमः खमः : प$_{२}$	कमः खमः : प$_{२}$:
७९	६,१७	ठिकाणीं असतील आणि	ठिकाणीं असतील तर.
७९	२२	प$_{२}$ आणि प$_{२}$	प$_{१}$ आणि प$_{२}$

पृष्ठ.	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
७९		आकृतींतील अइ वाढवून टोंकाशीं भ अक्षर घालावें.	
८०		———— अफ	———— भ —
८१	८	प, ही किंमत.	—प, ही किंमत
८८	१	उलट होईल.	उलट भ्रमण होईल.
८८	१९	ड दांड्यास प₂	ड दांड्यास २प
९६	५	२बउन= □ उछ	२△ बउन= □ उछ.
९६	६	□ उइ+ □ उछ.	□ उइ— □ उछ.
९७	१४।१५	दोहों प्रेरणांचा आहे.	दोहों प्रेरणांच्या बाहेर आहे.
९७	१६	प्रेरणांच्या दिशांनून.	प्रेरणांच्या दिशांवर.
९८	१	अक स्थळीं	अ, क स्थळीं
९८	१८	क×ब अरव×व बक	क×ब अ+रव×बक
९९	२४	विवक्षित बिंदुपासून.	विवक्षित ब बिंदूपासून.
१०७	१२	समतोल ठेवू शकणार.	समतोल ठेवू शकणार
१०९	२।२	ब आहे त्याठिकाणीं	दुसरा ब समजावा.
१०९		आकृतींत उजवीकडच्या खालच्या अंक लंबरेषेस	अक लंबरेषा समजावी.
११०	६	कक आणि बरॅव	अंक आणि बरॅव
११०	२१	आणि रव रॅव	आणि रव, रॅव
१११		आकृतींत रव च्या ठिकाणीं बरव पाहिजे.	
११२	१	कॅक आणि बरव	अॅक आणि बरव
११२	८	भुजे एवढीच घेतली.	भुजे एवढीच व तिशीं समांतर अशी घेतली.
११२		आकृतींत १ल्या उभ्या रेषेवर क, रव, अ, रव; २री वर ब क २रीवर ग अंगे अशीं अक्षरें घालावीं.	
११३	१६	म्हणून बाकी अंगे	म्हणून बाकी अंगें.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध.
११४	१४	तें त्याचें	तें त्यांचें.
११४	१५	युग्माच्या	युग्मांच्या.
११४	१८	भ्रामकत्वाची	भ्रामकत्वांची.
११४	२१	ठेवा त्याचा आंस.	ठेवा कीं, त्याची भुजा.
११५	१७	भ्रामकत्वांची	भ्रामकत्वाची.
११५	२४	युग्मांच्या मेरणांशीं	युग्माच्या मेरणांशीं
१२०	२५	त्यापासून नथ	त्या पासून नय
१२२	२५	तर त्या मेरणा	तर त्या मेरणां.
१२३	५-८	" आणि नक्षपासून	काढ " पर्यंत नको.
१२५		उजवीकडच्या आकृतींत करव मेरणा मिळतात तेथें न घाला.	
१२८	१५	या मध्यावर	यामध्यांवर.
१२९	१३	कर्णाचे	कर्णांचे
१३७	११	गग स्थळीं.	ग स्थळीं.
१३८	२	दोन बिंदुमधील	दोन बिंदू मधील.
१३८	३	अशी द्रव्यरेषा	अशी द्रव्यमयरेषा.
१३८	८	ही रेषा समरूप द्रव्यमयरेषा.	ही समरूप द्रव्यमय रेषा.
१३८	१८	हा समांतर चौकोन	हा समांतरभुज चौकोन.
१३८	२३	अड, इफ आणि कड रेषास.	अड, इफ आणि बक रेषांस.
१३८	२३	अंई	अं, ई
१३९	२३	अईस फग मिळत	अईस फग मिळते.
१३९		या पृष्ठावरील आकृतींत कगास अड मिळते तेथें न घालावें.	
१४२	२६	४ : ५ : ६ :	४ : ५ : ६ ::
१४३	१	कइब : कइअ :: अइब,	कइब : कइअ : अइब.
१४३	१९	ड आणि फ यांवजनाचा	ड आणि फ या वजनांचा.
१४४		आकृतींत डक रेषेच्या मध्यभागीं ड च्या जागीं ह घालावा.	

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध.	शुद्ध.
१४५	९	क्ष=गइ $\frac{हइ}{२}$×	क्ष= गइ= $\frac{हइ}{२}$×
१४६	१५	$\frac{उई}{डइ}$	$\frac{डई}{डइ}$
१४६	१७	उघम उभई	डघम , डभई
१४६	१९	$\frac{उर्म}{उफ}$	$\frac{डर्म}{डफ}$
१५०	८	गवस बस्थळीं	गबस बस्थळीं.
१५०	१५	गव रेषास	गव रेषा स
१५१		डावीकडच्या आकृतींत सबच्या मध्यें ग च्या जागीं ग,ब च्या जागीं अ; आणि ग पासून जी दिक् रेषा जाते तिच्या शेवटास ब अशीं अक्षरें घाला.	
,,		उजवीकडच्या आकृतींत डावीकडच्या ग च्या जागीं ग,ब च्या जागीं अ आणि ग पासूनच्या दिक् रेषेच्या शेवटास ब अशीं अक्षरें घाला.	
१५१	१०	पदाथाच	पदार्थाचें.
१५१	१५	तरग बिंदुसतून	तरंग बिंदुसतून.
१५१	१६	गुरुत्व आधारबिंदूच्या.	गुरुत्वमध्य आधारबिंदूच्या.
१५२	२	गअ आणि गस.	गक आणि गस.
१५२	३	परंतु गअ.	परंतु गक.
१५८	५	दिशान्चे	दिशांचें.
१६०	८	वर्नाचा	वर्गाचा
१६२	१०	जेव्हां उच्चालक समतोल असतो	हें काढून टाक.
१६२	१२	याची परिणा-	याची परिणामी.
१६२	१९	हे अ आणि नब यांवर	हे अन आणि नब यांवर.
१६७	१६	तराजू स्थायी व्हावा	तराजू स्थायी असावा.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध.
१६७	२२	ट हा तिचा टेंकू.	ट हा तिचा टेंकू.
१६८	१७	ट सभोंवतालच्या वजनाचा.	ट सभोंवतालच्या वजनांचा.
१७४	१४	ट,बग ठ,बगइत्यादि.	ट बग, ठ बग इत्यादि.
१७६	१५	त्याचे टेंकू ट ठ	त्याचे टेंकू ट, ठ
१७६	१९	तसेंच क जोडाच्या	तसेंच प जोडाच्या
१८६	५	यांपैकीं एका उच्चालकावर कार्य	एका उच्चालकावर जसें कार्य.
१९१	१४	संयुक्त चालक व कणा.	संयुक्त चाक व कणा.
१९५	७	क, रव	क, रव.
१९७	२	त्यावर या मात्र.	त्यावरचा मात्र.
१९८	५	पृष्ठभागामध्यें	पृष्ठभागांमध्यें.
२००		यांतील १२१ कलमाच्या आकृतींत म ने सांध. आणि म म आणि न न सांध. तसेंच म न सांध	
२०८	६	पइफव	पइफव.
२०९		डावी कडच्या आकृतींत प प्रेरणा लाविलेली दोरी कप्पीस स्पर्श करिते तेथें प च्या जागीं फ घाला.	
२१२	७	या प्रमाणें नच्या	याप्रमाणें न च्या
२१६	२१	दा खालच्या.	अगदीं खालच्या.
२१८	५	+ व, (२ न २ -	+ व, (२ न २)-
२१८	१७	यांत वजन एक दोरीच्या.	यांत वजनास एक दोरीच्या.
२३०	६	अब सपाटीशीं ठ	अब सपाटीशीं ध
२३०		यावरील वरच्या आकृतींत ड पासून निघालेल्या दिक् रेषेच्या टोंकापाशीं व घाला.	
२३१	१२	= भुठ / कोभुठ स्पर्शठ.	= भुठ / कोभुठ = स्पर्शठ.
२३२		यांतील आकृतीच्या अ क च्या मध्ये ब च्याजागीं व घाला.	

पृष्ठ	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
२२७	११	मध्याशींल	मध्याशी लं.
२४३	२	अग / गक	कग / अग
,,	,,	अग= कग· भुथ	कग= अग भु· थ.
२४६	९	परिघ सूत्रांतर	परिघ· सूत्रांतर.
२४७	१०	खालच्या बाजूच्या	खालच्या बाजूस.
२४९	२	(क पहा)	(क· १५४ पहा.)
२४९	१४	क. प्रमाणें	क· १५४ प्रमाणें.
२५२	७	पाकळींतील.	पोकळींतील.
२५४	२	फळावरोबर.	फळीबरोबर
२६६		यांतील आकृतीच्या अब कलत्या रेषेच्या ब च्या जागीं ब' घाला.	
२७२	१६	स्पर्शरेथ / १+ २स्पथ	स्पथ. / १+ २स्पं·थ.
२७६	९	घर्षणयुक्तउच्चालक	घर्षणयुक्त चाक
२७६	१५	समानभुजाच्या	समान भुजांचा.
२७७	१७	त(ब+ ब'). शत +	त(ब+ ब') — शत±
२७९	१	भुथ+ गकोभुथ. / कोभु·थक गभुथ	भुथ+ ग·कोभुथ· / कोभुथक+ ग·भुथ
२८०	१	स्प·म ग	स्प· प= ग.
२८१	१२	श= वभु· श.	श= वभु प.
२८२	३	श१+ श२+ श३ ····+ शन शत	त(श१+ श२ ···· + शन)= शत.
२८३	६	अ / २मत	अ / २मर्त

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध.	शुद्ध.
२८२	८	$\frac{\text{श}}{\text{व}} - \frac{\text{त}}{\text{त}},\ \frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मत}} \mp \text{ग}}{\text{१}\pm\times\frac{\text{अ}}{\text{२मत.}}}$	$\frac{\text{श}}{\text{व}} = \frac{\text{त}}{\text{त}} \times \frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त}} \mp \text{ग}}{\text{१}\pm\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त.}}}$
२८३	९	त=त	त=र्त
२८३	१५	श शक्ति	र्श शक्ति.
२८३	१७	पाया २मत	पाया २मर्त
२८३	१८	$\frac{\text{अ}}{\text{२मत.}}$	$\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त.}}$
२८४	४	$\frac{\text{श}}{\text{व}}$	$\frac{\text{र्श}}{\text{व}}$
२८४	४	$\frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त}} \mp \text{ग}}{\text{१}\pm\text{ग}\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त.}}} = \frac{\text{अ}\mp\text{२मर्तग}}{\text{२मत}\pm\text{गअ}}$	$\frac{\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त}} \mp \text{ग}}{\text{१}\pm\text{ग}\frac{\text{अ}}{\text{२मर्त}}} = \frac{\text{अ}\mp\text{२मर्तग}}{\text{२मर्त}\pm\text{गअ.}}$
२८४	७	$\text{र्श} = \text{श}\times\frac{\text{त}}{\text{न}}$	$\text{र्श} = \text{श}\times\frac{\text{त}}{\text{र्त}}.$
२८४	१२	जग घर्षणाचा.	घर्षणाचा.
२८४	१८	मुळील	मुष्कील.
२८५	६	जमिनीवर उरून	जमिनीवर ठरून.
२८६	२२	योजीत.	योजितात.
२८९	६,७	०७, ०३	०.७, ०.३